

بررسی اثر معیوب بودن بر روی رفتار دینامیکی سازه هدفمند

محمد مسکینی^۱، مصطفی لیوانی^{۱*}، محمدحسین حبیبی^۲

۱- استادیار، دانشکده هوافضا، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

چکیده

در این پژوهش اثر معیوب بودن ماده هدفمند بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق هدفمند سالم و معیوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. یک تابع تغییر شکل برشی هایپربولیک جدید در این مقاله ارائه شده است. تابع هایپربولیک جدید طوری انتخاب شده که با وجود دقت کافی، درجه تابع تا حدالامکان کم شود تا سرعت محاسبات تا اندازه زیادی کاهش یابد. خواص مواد هدفمند با توزیع توان تابع تغییرات خواص در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ساختار این مواد در طی فرآیند تولید نمی‌تواند کاملاً مطابق با الگوی مد نظر باشد که این موضوع منجر به تولید ماده هدفمند معیوب می‌شود. از این رو در این پژوهش، یک مدل سالم و دو نوع مدل معیوب برای تابع تغییرات خواص در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. معادلات به‌دست آمده با استفاده از روش نایبر برای شرایط مرزی ساده حل گردید. اثرات پارامترهای مهم هندسی و مکانیکی شامل نسبت ضخامت به طول، نسبت طول به عرض و توان تابع تغییرات خواص بر روی پاسخ فرکانس طبیعی ورق هدفمند سالم و معیوب بررسی شده است. جهت اعتبارسنجی، نتایج تحلیلی به‌دست آمده در این پژوهش با نتایج ارائه شده در مقالات مقایسه شده است و در این مقایسه تطابق خوبی حاصل گردید که نشان از صحیح بودن تئوری جدید، روند استخراج و حل معادلات است.

کلمات کلیدی

ارتعاشات آزاد، مواد هدفمند معیوب، تئوری هایپربولیک جدید، اصل همیلتون، روش نایبر.

Investigation of Imperfection Effects in Dynamic Behavior of FG Structure

Mohammad Meskini¹, Mostafa Livani^{1*}, Mohammad Hossein Habibi²

1- Assistant Professor, Department of Aerospace Engineering, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology

2- MS student, Department of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Science and Technology

Abstract

In this study, the effect of material imperfection on the free vibration response of perfect and imperfect FG plate is studied. A new hyperbolic shear deformation function is presented in this paper. The new hyperbolic function is chosen in such a way that the degree of the function is reduced as much as possible, despite the sufficient accuracy, so that the calculation speed is greatly reduced. The properties of the FG plate varied along the thickness according to power law. The material composition in production process cannot be completely in accordance with the expected pattern, which leads to the production of imperfect FG material. The governing differential equations are derived using the Hamilton's principle. The obtained equations were solved using the Navier method with simple boundary conditions. The effects of important geometric and mechanical parameters of perfect model and two types of imperfect model, including length to thickness ratio, length to width ratio, wave number and power-law exponent on natural frequency response of imperfect FG plate are investigated. To verification, the analytical results obtained in this study are compared with the results presented in the literature, and in this comparison, a good agreement was obtained, which shows the correctness theory, deriving and solving equations.

Keywords

Free Vibration, Imperfect FGM, New hyperbolic theory, Hamilton's Principal, Navier method.

۱- مقدمه

امروزه استفاده از مواد هدفمند به علت تغییر تدریجی ترکیبات شیمیایی، توزیع و جهت‌گیری و یا اندازه فاز تقویت‌کننده در یک یا چند بعد خواص متفاوتی را در مناطق مختلف از خود بروز می‌دهند. در انواع مصارف مهندسی بخصوص در مواردی که نیاز به خواص متفاوت در مناطق مختلف باشد، از جمله صنعت هوافضا، خودروسازی و... این مواد دارای اهمیت و ضرورت بالایی می‌باشند.

ماده هدفمند (FGM) ماده‌ای است ناهمگن، با گرادیان حساب شده که ترکیبات، ساختار و خواص مهندسی آن در یک راستای معین تولید شده و در آن خواص ماده با مکان تغییر می‌کند. همین گرادیان سبب می‌شود تا این مواد هدفمند ویژگی‌های مهندسی بهتری نسبت به ماده همگن ساخته شده با همان ترکیبات ارائه دهد که خواص و یا عملکرد آن در یک یا چند راستا به‌طور پیوسته یا تدریجی تغییر می‌کند. ساختار این مواد در طی فرآیند تولید نمی‌تواند کاملاً مطابق با الگوی مدنظر باشد که این موضوع منجر به تولید ماده هدفمند معیوب می‌شود.

با توجه به این موضوع که در این پژوهش هدف این است که در نتایج به‌دست آمده جوانب مختلف در آن در نظر گرفته شده باشد، در ابتدا پژوهش‌های انجام شده روی ورق‌های هدفمند و پدیده ارتعاشات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مسکینی و عارفی [۱] ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته هدفمند متخلخل و رویه‌های پیزوالکتریک را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک تجزیه و تحلیل کردند. آن‌ها معادلات حاکم را با استفاده از اصل همپلتون استخراج کردند و سپس معادلات به‌دست آمده را با استفاده از روش ناویر حل کردند. ستوده و شجاعی [۲] با استفاده از روش مربع دیفرانسیلی، تحلیل ارتعاشات آزاد

غیرخطی ورق‌های چهار وجهی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را انجام دادند. لیوانی و ملک زاده‌فرد [۳] ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی دو انحنا با ضخامت متغیر را با استفاده از تئوری مرتبه بالا مطالعه کردند. آن‌ها معادلات دیفرانسیل حاکم را بر مبنای تئوری مرتبه بالای ورق ساندویچی ارتقا یافته و اصل همپلتون استخراج کردند. در نهایت اثرات لایه‌چینی‌های مختلف، نسبت طول به عرض ورق، تغییر خواص مواد رویه‌ها، نسبت ضخامت‌های رویه‌ها و جنس‌های مختلف مواد رویه‌ها روی ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی دو انحنا با ضخامت متغیر بررسی کردند. رضایی و شاطریان القلندیس [۴] ارتعاشات آزاد تیر ترک‌دار با معادلات حرکت چند مودی کوپل را بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد که با تحریک صرفاً در مود اول، مولفه هارمونیک پاسخ ارتعاشی اطلاعات محدودی در مورد ترک ارائه می‌دهد، در حالی که با تحریک همزمان موده‌های بالاتر، مولفه‌های هارمونیک متعددی به علت وجود ترک در پاسخ ارتعاشی ایجاد می‌شوند که حساسیت زیادی به ترک دارند و از تحلیل آنها اطلاعات دقیقی در مورد موقعیت و عمق ترک حاصل می‌شود. صبحی و رادوان [۵] یک تئوری برای آنالیز ارتعاشات آزاد و کمانش یک صفحه هدفمند ارائه کردند. آن‌ها با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم را استخراج کردند و با استفاده از روش ناویر معادلات به‌دست آمده را حل کردند. مقانی و همکاران [۶] ارتعاشات ترمومکانیکی لوله‌های هدفمند حاوی س‌یال را با هدف افزایش پایداری مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. کیم و همکاران [۷] به بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش دینامیکی صفحات هدفمند با استفاده از روش نیمه تحلیلی گالرکین پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود تأثیر پارامترهای هندسی و دما را مورد بررسی قرار دادند. زهو و همکاران [۸] به تحلیل و بررسی ارتعاشات آزاد نانولوله‌های هدفمند چرخشی منتقل‌کننده مایعات را تحت بارهای محوری براساس تئوری گرادیان کرنش غیر

برشی ندارد. مشات و همکاران [۱۸] چگونگی تأثیر دما و رطوبت بر خمش صفحات متخلخل را مطالعه کردند. تغییر شکل برشی عرضی و کرنش نرمال عرضی را مورد مطالعه قرار دادند. حاجی و همکاران [۱۹] ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی FG ناقص ساخته شده از صفحات متخلخل که بر روی فونداسیون وینکلر-پاسترناک قرار دارند را مورد مطالعه قرار دادند. آنها از تغییر شکل برشی مرتبه سوم (TSDT) برای جابجایی استفاده کردند و معادلات حرکت را با استفاده از اصل همپلتون به دست آوردند. سینگ و گوپتا [۲۰] تأثیر عیوب هندسی بر پاسخ ارتعاشی آزاد صفحات ساندویچی هدفمند دارای گشودگی دایروی را مورد بررسی قرار دادند. آنها تأثیر عیوب هندسی هم‌چون عیوب نوع سینوسی و نوع کلی روی رفتار ارتعاش صفحه را مورد مطالعه قرار دادند و معادلات حاکم بر اساس اصل لاگرانژی برای شرایط مرزی ساده و گیره استخراج کردند. چن و همکاران [۲۱] ارتعاش آزاد صفحه مستطیلی ساخته شده از مواد هدفمند دو جهته (BDFGMs) با شرایط مرزی عمومی و عیوب هندسی را مورد مطالعه قرار دادند. آنها فرض کردند مواد هدفمند بر طبق قاعده توانی در امتداد دو جهت درون صفحه‌ای با دو توزیع متقارن و نامتقارن تغییر کنند. آنها دو نوع نقص هندسی را در نظر گرفتند شامل نقص متقارن کلی که با توابع سینوسی و نمایی مدل کردند، و نقص محلی که با توابع هذلولی و کسینوسی شبیه‌سازی کردند. برای استخراج معادلات از تابع انرژی لاگرانژی استفاده می‌شود و برای حل معادلات از روش ریتز و سری فوریه استفاده کردند. چابانی و همکاران [۲۲] به تحلیل رفتارهای غیرخطی پنل هدفمند متخلخل با توزیع تخلخل‌های مختلف تحت انواع مختلف بارهای عرضی با استفاده از روش المان محدود مرتبه بالا پرداختند.

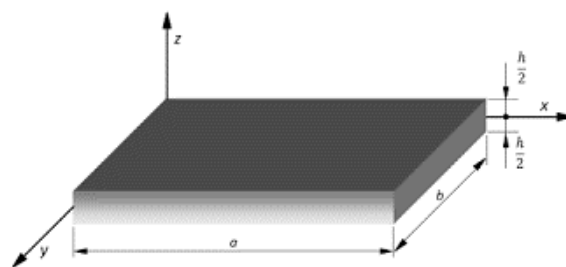
با بررسی پژوهش‌های یاد شده در خصوص روش‌های تحلیلی رفتار ارتعاشی مواد هدفمند مشاهده شد که نیاز به بسط یک تئوری جدید که در عین ساده بودن، بتواند

محلی پرداختند. انصاری و همکاران [۹] اثرات پدیده‌های کمانش و ارتعاشات آزاد ورق مرکب هدفمند با بارگذاری حرارتی با استفاده از روش عددی را بررسی کردند. تام و کین [۱۰] ارتعاشات آزاد تیرهای تابعی مدرج دو جهتی را در یک محیط حرارتی تحلیل کردند. در نتایج آنها با توجه به این که خواص مواد به دما وابسته بوده، در هر دو راستا با توزیع توانی تغییر کرده است. ستوده و شفیع [۱۱] رفتار کمانش و ارتعاشات آزاد غیرخطی تیرهای تقویت شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند واقع بر بستر الاستیک غیرخطی را تحلیل کردند. لیوانی و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی بر اساس نظریه مرتبه بالای ردی با شرایط مرزی دو سرگیردار مورد مطالعه قرار دادند. آنها برای استخراج پاسخ فرم بسته برای فرکانس طبیعی تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی از روش ریتز استفاده کردند. وانگ و همکاران [۱۳] با استفاده از یک تئوری واحد اثر همزمان ابعاد کوچک و تغییر شکل‌های برشی را بر ارتعاشات آزاد ریز پوسته‌های ضخیم استوانه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی را بررسی کردند. مکسی و همکاران [۱۴] یک تئوری تغییر شکل برشی برای پاسخ‌های خمشی، کمانشی و ارتعاشات آزاد صفحات هدفمند با استفاده از اصل همپلتون و روش ناویر ارائه کردند احیایی و همکارانش [۱۵] ارتعاشات آزاد وابسته به بعد ریز پوسته‌های استوانه‌ای دولایه ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش تریبئات تفاضلی تعمیم یافته برای شرایط مرزی مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار دادند. صفرپور و همکاران [۱۶] به مطالعه و بررسی وابستگی اثرات پدیده‌های کمانش و ارتعاشات آزاد به ضخامت استوانه مرکب چندلایه دارای لایه هدفمند با استفاده از روش تحلیلی پرداختند. چیکر و همکاران [۱۷] یک نظریه جدید از تغییر شکل برشی برای تحلیل کمانش صفحات ساندویچی مواد ارائه دادند. این نظریه فقط چهار مجهول دارد و نیاز به ضریب تصحیح

رفتار ارتعاشات آزاد مواد هدفمند معیوب را بخوبی ارزیابی کند، بیش از پیش احساس شد. در این راستا در این مقاله، تابع جدیدی ارائه خواهد شد که با استفاده از آن بتوان رفتار ارتعاشی ورق‌های ساندویچی با هسته هدفمند معیوب و رویه‌های پیزوالکتریک را بخوبی ارزیابی کند. سپس تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند سالم و معیوب با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی هایپربولیک انجام می‌شود. معادلات حاکم بر مبنای اصل همیلتون استخراج می‌گردند.

۲- به دست آوردن معادلات حاکم

در این بخش در ابتدا مدل هندسی مورد مطالعه ارائه می‌گردد، سپس تئوری مورد استفاده ارائه می‌شود. بعد از آن روابط تنش-کرنش بیان می‌شود و در انتهای این بخش، معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد ورق هدفمند سالم و معیوب بر مبنای تئوری مرتبه بالای هایپربولیک استخراج خواهد شد.



شکل ۱: هندسه ورق هدفمند مورد مطالعه

هندسه مدل مورد مطالعه در این مقاله از ورق هدفمند معیوب تشکیل شده است. همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است ضخامت h ، ضخامت ورق هدفمند می‌باشد. همچنین ورق دارای طول a و عرض b می‌باشد.

در این مقاله تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک ارائه شده برای مدلسازی میدان جابجایی به صورت زیر می‌باشد [۱]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, t) &= w_b(x, y, t) + w_s(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ توابع مجهول برای جابجایی‌های درون صفحه و $w(x, y, t)$ تابع مجهول برای جابجایی عرضی صفحه می‌باشند.

با بررسی توابع ارائه شده در پژوهش‌های مختلف و مقایسه نتایج حاصل از آن‌ها، در این مقاله برای اولین بار برای توابع $f(z)$ و $g(z)$ روابطی به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} f(z) &= \tanh \left(\left(\frac{z}{h} \right) - 2 \times \left(\frac{z}{h} \right)^3 \right) \\ g(z) &= 1 - f'(z) \end{aligned} \quad (2)$$

روابط کرنش-جابجایی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = g(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \end{aligned} \quad (3)$$

در این بخش الگوهای صفحات FG کامل و معیوب مورد استفاده در این مقاله ارائه می‌شود. برای این منظور برای صفحه FG کامل، تغییرات خواص مکانیکی از جمله مدول الاستیک در راستای ضخامت فرض می‌شود به صورت زیر تغییر می‌کند [۱۲]:

$$\begin{aligned} \{A_i, B_i, D_i, E_i, F_i, G_i, H_i\} = \\ \int (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2, g(z)^2) c_i dz \\ \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8\} = \\ \int (1, z, z^2, f(z), zf(z), f(z)^2, g(z), g(z)^2) \rho(z) dz \end{aligned} \quad (8)$$

چون شرایط حاکم بر صفحه یک شرایط استاتیکی است، از اصل همپلتون به منظور محاسبه معادلات حاکم بر مساله استفاده می‌شود. بر اساس این اصل داریم [۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta U - \delta T) dt = 0 \quad (9)$$

که در آن δU تغییرات انرژی کرنشی و W کار نیروهای خارجی می‌باشد.

انرژی کرنشی ورق را می‌توان بر حسب کلیه تنش‌ها و کرنش‌های وارد بر ورق به صورت زیر محاسبه نمود [۱]:

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) dV \quad (10)$$

کار نیروهای خارجی ورق بصورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$\begin{aligned} \delta T = \int_V \rho \vec{v} \cdot \delta \vec{v} dV \Rightarrow \\ \delta T = \int_V \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} \right] dV \end{aligned} \quad (11)$$

جهت استخراج معادلات حاکم بر مساله لازم است تا کلیه کرنش‌ها و جابجایی‌های موجود در رابطه‌ی (۱۱) با مجهولات مفروض در میدان‌های جابجایی روابط (۳) جایگذاری شود [۱]:

$$E(z) = E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k; -0.5h \leq z \leq 0.5h \quad (4)$$

برای مدل‌سازی صفحه FG معیوب از دو مدل استفاده می‌شود، در مدل اول فرض می‌شود تغییرات مدول الاستیک در راستای ضخامت بصورت زیر تغییر کند [۱۲]:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k; -0.5h \leq z \leq 0 \\ E_2(z) &= E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k; 0 \leq z \leq a \\ E_3(z) &= E_1; a \leq z \leq 0.5h \end{aligned} \quad (5)$$

در مدل دوم فرض می‌شود تغییرات مدول الاستیک در راستای ضخامت بصورت زیر تغییر کند [۱۲]:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k; \\ &0 \leq z \leq 0.5h \\ E_2(z) &= E_2 + (E_1 - E_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k; \\ &-b \leq z \leq 0 \\ E_3(z) &= E_2; -0.5 \leq z \leq -b; -0.5 \leq \frac{b}{h} \leq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

منتجه‌های تنش برای ورق هدفمند به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱]:

$$\begin{aligned} \int \sigma_i dz &= N_i; (i = x, y, xy) \\ \int \sigma_i z dz &= M_i^b; (i = x, y, xy) \\ \int \sigma_i f(z) dz &= M_i^f; (i = x, y, xy) \\ \int \tau_{ij} g(z) dz &= S_{ij}; (i, j = xz, yz) \\ \int D_i \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) dz &= P_i; (i = x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

ثوابت مورد استفاده در این مقاله به صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_V \rho \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial t} \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y \partial t} \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial t} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y \partial t} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y \partial t} \right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial w_b}{\partial t} + \frac{\partial w_s}{\partial t} + g(z) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \delta w_b}{\partial t} + \frac{\partial \delta w_s}{\partial t} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (15)$$

با گسترش رابطه (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned} \delta T = & \iint_A z \rho \left[\frac{-\partial^2 u_0}{\partial t^2} \delta u_0 - z \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_b - \right. \\ & f(z) \frac{\partial u_0}{\partial x \partial t^2} \delta w_s + z \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 + \\ & z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b + z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s \\ & + f(z) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial t^2} \delta u_0 + z f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_b + \\ & f(z)^2 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w_s - \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \delta v_0 \\ & - z \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_b - f(z) \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial t^2} \delta w_s + z \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} \delta v_0 + \\ & z^2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_b + z f(z) \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_s + f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial y \partial t^2} \delta v_0 \\ & + z f(z) \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_b + f(z)^2 \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial t^2} \delta w_s - \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w_b \\ & - \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_b}{\partial t^2} \delta \varphi - \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta w_b - \\ & \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta w_s - g(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial t^2} \delta \varphi - g(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta w_b \\ & \left. - g(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta w_s - g(z)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \delta \varphi \right] dz dA \end{aligned} \quad (16)$$

با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \delta U = & \iint_A z \left[\sigma_x \left(\frac{\delta u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) \right. \\ & + \sigma_y \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) \\ & + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right) \\ & + \tau_{xz} \left(g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) \\ & \left. + \tau_{yz} \left(g(z) \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} + g(z) \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) \right] dz dA \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_A \left[\left(N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} - M_x^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - M_x^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} \right) \right. \\ & + \left(N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} - M_y^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} - M_y^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} \right) \\ & + \left(N_{xy} \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} - 2M_{xy}^b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \right. \\ & \left. - 2M_{xy}^s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} \right) \Big] dA \end{aligned} \quad (18)$$

با گسترش رابطه (۱۸) داریم:

$$\begin{aligned} \delta U = & \int_A \left[\left(-\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 - \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} \delta w_s \right) \right. \\ & + \left(-\frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 - \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} \delta w_s \right) + \\ & \left(-\frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v_0 - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} \delta w_b \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} \delta w_s \right) \Big] dA \end{aligned} \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۱۹) داریم:

$$\begin{aligned} \delta u : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \\ & - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} - \\ & (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial x \partial y^2} - E_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + K_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \\ & I_1 u - I_2 w_{b,x} - I_4 w_{s,x} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta v : & (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \\ & - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} \\ & - (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} - E_{22} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} = \\ & I_1 v - I_2 w_{b,y} - I_4 w_{s,y} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w_b : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\ & (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - D_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - (D_{12} + 4D_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - F_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - F_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\ & - (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ & - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \\ & I_1 w_b + I_1 w_s + I_2 u_{0,x} + I_2 v_{0,y} - I_3 w_{b,xx} \\ & - I_3 w_{b,yy} - I_5 w_{s,xx} - I_5 w_{s,yy} + I_7 \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \delta T = \int_A & \left(-I_1 u \delta u_0 - I_2 u_{,x} \delta w_b \right. \\ & - I_4 u_{,x} \delta w_s + I_2 w_{b,x} \delta u_0 + I_3 w_{b,xx} \delta w_b \\ & + I_5 w_{b,xx} \delta w_s + I_4 w_{s,x} \delta u_0 + I_5 w_{s,xx} \delta w_b \\ & + I_6 w_{s,xx} \delta w_s - I_1 v \delta v_0 - I_2 v_{,y} \delta w_b \\ & - I_4 v_{,y} \delta w_s + I_2 w_{b,y} \delta v_0 + I_3 w_{b,yy} \delta w_b \\ & + I_5 w_{b,yy} \delta w_s + I_4 w_{s,y} \delta v_0 + I_5 w_{s,yy} \delta w_b \\ & + I_6 w_{s,yy} \delta w_s - I_1 w_b \delta w_b - I_1 w_b \delta w_s \\ & - I_7 w_b \delta \varphi - I_1 w_s \delta w_b - I_1 w_s \delta w_s - \\ & \left. I_7 w_s \delta \varphi - I_7 \varphi \delta w_b - I_7 \varphi \delta w_s \right. \\ & \left. - I_8 \varphi \delta \varphi \right) dA \end{aligned} \quad (17)$$

با جایگذاری انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی

معادلات حرکت به اصل همیلتون داریم:

$$\begin{aligned} \delta u : & \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v : & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b : & \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ & - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = 0 \\ \delta w_s : & \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} \\ & - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - \\ & N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

در نهایت معادلات حاکم به صورت روابط زیر به دست

می‌آیند:

۴- نتایج و بحث

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند ارائه خواهد شد. در ابتدا نتایج به دست آمده از تحلیل حاضر با نتایج دیگر مراجع اعتبارسنجی می شود و سپس نتایج به دست آمده از ارتعاشات ورق هدفمند معیوب مورد مطالعه و بررسی قرار خواهند گرفت.

۴-۱- اعتبارسنجی تئوری حاضر

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند با نتایج دیگر پژوهش ها مقایسه خواهد شد.

در جدول ۱ مشخصات هندسی و مکانیکی ورق هدفمند ارائه می شود.

جدول ۱: مشخصات هندسی و مکانیکی ورق هدفمند

a/b	ضریب پواسون	مدول الاستیسته
۰/۵	۰/۳	200×10^9
		70×10^9

به منظور اعتبارسنجی روش ارائه شده، نتایج بی بعد شده حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند با استفاده از تئوری حاضر با نتایج تحلیلی ارائه شده مراجع [۲۳]، [۲۴] و [۲۵] مقایسه می شوند.

در جدول ۲ فرکانس های طبیعی اول، دوم و سوم ورق هدفمند با استفاده از تئوری جدید با نتایج به دست آمده توسط مراجع [۲۳]، [۲۴] و [۲۵] مقایسه گردیده است. همان طور که در جدول مشاهده می شود نتایج به دست آمده از تئوری حاضر با نتایج حاصل مراجع [۲۳]، [۲۴] و [۲۵] تطابق خوبی دارد که این تطابق نیز می تواند نشان دهنده صحت تئوری مورد مطالعه در این پژوهش باشد.

$$\begin{aligned}
 \delta w_s : E_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + \\
 (E_{12} + 2E_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + E_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - F_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\
 F_{22} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - (2F_{12} + 4F_{66}) \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
 -G_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - (2G_{12} + 4G_{66}) \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 + G_{22} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} + H_{44} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\
 + H_{44} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + H_{55} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\
 - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} = I_1 w_b + \\
 I_1 w_s + I_4 u_{0,x} + I_4 v_{0,y} - I_5 w_{b,xx} - I_5 w_{b,yy} \\
 - I_6 w_{s,xx} - I_6 w_{s,yy} - I_7 \varphi
 \end{aligned} \quad (22)$$

۳- حل معادلات حاکم

با استفاده از روش ناویر، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله برای شرایط مرزی ساده به صورت زیر تعریف می شوند [۱]:

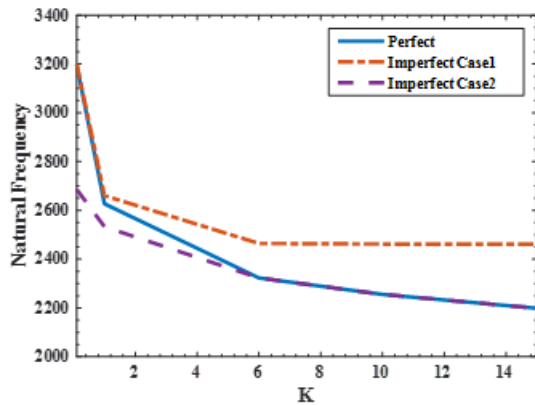
$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U e^{i\omega t} \cos \lambda x \sin \mu y \\ V e^{i\omega t} \sin \lambda x \cos \mu y \\ W_b e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \\ W_s e^{i\omega t} \sin \lambda x \sin \mu y \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \mu = \frac{m\pi}{b}$$

که در آن U، V، W_b، W_s مجهولات معادلات می باشند.

ماتریس ضرایب جابه جایی را می توان به صورت زیر بیان کرد:

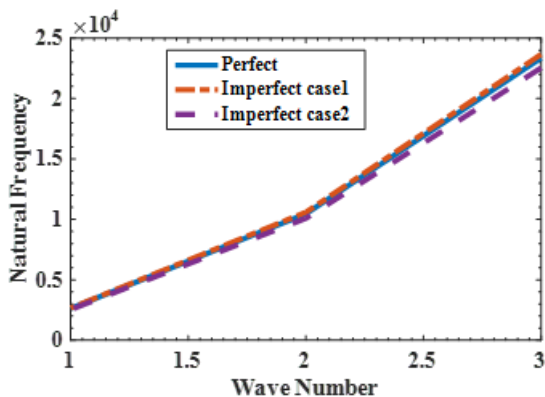
$$[K]_{4 \times 4} \omega - [N]_{4 \times 4} = 0 \quad (24)$$



شکل ۲: اثر تابع تغییرات خواص مواد بر روی فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند

۳-۴- بررسی اثر عدد موج بر روی فرکانس طبیعی ورق هدفمند

در این بخش اثر تغییرات عدد موج ورق هدفمند بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق هدفمند کامل و معیوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۳ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات عدد موج ورق هدفمند نشان داده شده است.



شکل ۳: بررسی اثر عدد موج بر روی فرکانس طبیعی ورق هدفمند

همان‌طور که شکل ۳ نشان می‌دهد با افزایش عدد موج مقدار فرکانس طبیعی ورق هدفمند به سرعت افزایش می‌یابد.

جدول ۲: مقایسه نتایج حاصل از ارتعاشات آزاد ورق هدفمند تئوری

حاضر با نتایج مراجع [۲۳]، [۲۴] و [۲۵]

مرجع [۲۵]	مرجع [۲۴]	مرجع [۲۳]	حاضر	a/h	K
۰/۰۱۵۳	۰/۰۱۵۳	۰/۰۱۵۳	۰/۰۱۵۱	۲۰	
۰/۰۵۹۶	۰/۰۵۹۷	۰/۰۵۹۸	۰/۰۵۹۶	۱۰	۱
۰/۲۱۹۳	۰/۲۱۹۲	۰/۲۱۹۷	۰/۰۱۵۱	۵	

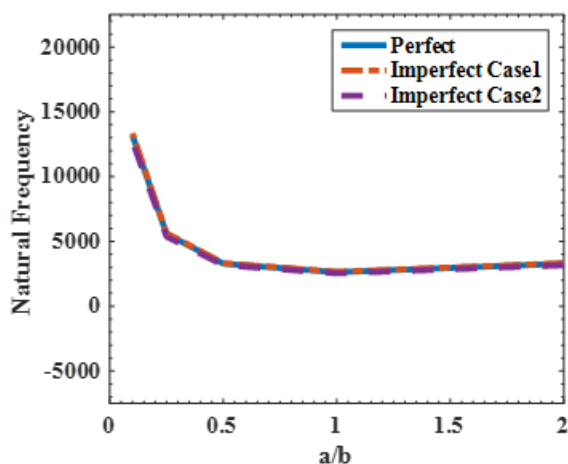
۲-۴- بررسی اثر تابع تغییرات خواص مواد بر روی فرکانس طبیعی ورق هدفمند

در این بخش اثر توان تابع تغییرات خواص در ورق هدفمند (K) بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق هدفمند کامل و معیوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۲ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف K نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود با افزایش مقدار توان تابع تغییرات خواص مواد از ۰/۱ تا ۶ مقدار فرکانس طبیعی ورق هدفمند برای حالت کامل و معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم به شدت کاهش یافته و از مقدار ۶ به بعد توان تابع تغییرات خواص مواد، تغییرات فرکانس طبیعی تقریباً ناچیز است. همچنین در این نمودار مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل اول و کمترین مقدار برای حالت معیوب مدل دوم می‌باشد. همچنین در شکل ۲ مشهود است برای توان تابع تغییرات خواص مواد بیشتر از ۶، نتایج مدل حالت کامل و معیوب مدل دوم بر هم منطبق می‌شود، ولی اختلاف این دو مدل با نتایج معیوب مدل اول افزایش می‌یابد.

در این بخش اثر تغییرات نسبت طول به عرض ورق هدفمند (a/b) بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق هدفمند کامل و معیوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۵ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت طول به عرض ورق (a/b) آورده شده است.

همانطور که شکل ۵ نشان می‌دهد با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق هدفمند از $0/1$ تا 1 ، فرکانس طبیعی با سرعت زیادی کاهش و با افزایش مقدار نسبت طول به عرض ورق هدفمند از مقدار 1 تا 2 فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در این نمودار مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل اول و کمترین مقدار برای حالت معیوب مدل دوم می‌باشد. همچنین شکل ۵ نشان می‌دهد با افزایش $0/1$ تا $0/5$ ، مقدار فرکانس نزدیک به $1/5$ کاهش می‌یابد.



شکل ۵: بررسی اثر نسبت طول به عرض ورق بر روی فرکانس طبیعی

ورق هدفمند

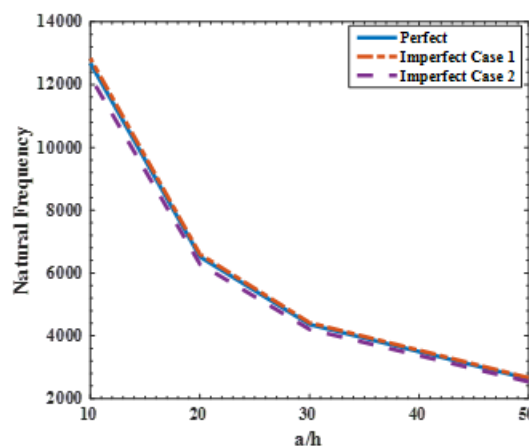
۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند با

۴-۴- بررسی اثر نسبت طول به ضخامت ورق بر روی فرکانس طبیعی ورق هدفمند

در این بخش اثر تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق (a/h) بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد ورق هدفمند کامل و معیوب مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۴ تغییرات فرکانس‌های طبیعی ورق هدفمند کامل، معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم برای مقادیر مختلف تغییرات نسبت طول به ضخامت ورق هدفمند (a/h) آورده شده است.

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق هدفمند، فرکانس طبیعی ورق ساندویچی به سرعت کاهش می‌یابد که علت این امر کاهش ضخامت صفحه هدفمند و در نتیجه کاهش استقامت آن می‌باشد. در این نمودار مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار فرکانس طبیعی برای حالت معیوب مدل اول و کمترین مقدار برای حالت معیوب مدل دوم می‌باشد. همچنین شکل ۴ نشان می‌دهد نسبت طول به ضخامت ورق هدفمند (a/h) از 10 تا 50 ، یعنی با افزایش 5 برابر این نسبت، مقدار فرکانس حدوداً به $1/5$ کاهش می‌یابد.



شکل ۴: بررسی اثر نسبت طول به ضخامت ورق بر روی فرکانس

طبیعی ورق هدفمند

۴-۵- بررسی اثر نسبت طول به عرض ورق بر روی فرکانس

طبیعی ورق هدفمند

ic shear deformation theory to free vibration analysis of functionally graded porous plate with piezoelectric face-sheets”, *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 71, No. 5, 2019, pp. 459-467.

[2] A. R. Setoodeh, and M. Shojaee, “Application of TW-DQ method to nonlinear free vibration analysis of FG carbon nanotube-reinforced composite quadrilateral plates”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 108, 2016, pp. 1-11.

[3] M. Livani, and K. Malekzadeh Fard, “Free vibration analysis of doubly curved composite sandwich panels with variable thickness”, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 52, No. 8, pp. 2195–2212, 2019. (in Persian)

[4] M. Rezaee, and V. Shaterian alghalandis, “An Analytical Method for Damped Free Vibration Analysis of a Cracked Beam Considering the Coupled Multimode Equations”, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 52, No. 1, pp. 155-172, 2020. (in Persian)

[5] M. Sobhy, and A. F. Radwan. “A new quasi 3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates”, *International Journal of Applied Mechanics*, Vol. 9, No.1, 2017.

[6] A. Ebrahimi-Mamaghani, R. Sotudeh-Gharebagh, R. Zarghami, and N. Mostoufi, “Thermomechanical stability of axially graded Rayleigh pipes”, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol.50, No. 2, 2022, pp. 412-441.

[7] S. E. Kim, N. D. Duc, V. H. Nam, and N. V. Sy, “Nonlinear vibration and dynamic buckling of eccentrically oblique stiffened FGM plates resting on elastic foundations in thermal environment”, *Thin-Walled Structures*, Vol. 142, 2019, pp.287-296 .

[8] X. Zhu, Z. Lu, Z. Wang, L. Xue, and A. Ebrahimi-Mamaghani, “A Vibration of spinning functionally graded nanotubes conveying fluid”, *Engineering with Computers*, Vol. 38, 2022, pp.1771–1792.

[9] R. Ansari, J. Torabi, and M. Faghih Shojaei, “Buckling and vibration analysis of embedded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite annular sector plates under thermal loading”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 109, 2017, pp. 197-213.

[10] T. T.Thom, and N. D. Kien, “Free vibration analysis of 2-D FGM beams in thermal environment based on a new third-order shear deformation theory”, *Vietnam Journal of Mechanics*, VAST, Vol. 40, No. 2, 2018, pp. 121-140.

[11] H. Shafiei and A. R. Setoodeh “Nonlinear free vibration and post-buckling of FG-CNTRC beams on nonlinear foundation”, *Steel and Composite Structures*, Vol. 24, 2017, pp. 65-77.

[12] A. R. Rahimi, M. Livani, and A. Negahban Boron, “Free vibration analysis of functionally graded material beams with transverse crack”, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 51, No. 1, 2021, pp. 277-281.

[13] Y. Wang, K. Xie, T. Fu, and W. Zhang, “A unified modified couple stress model for sizedependent free vibrations of FG cylindrical microshells based on high-or-

استفاده از تئوری هایپربولیک جدید ارائه شده انجام شد و نتایج حاصله با مراجع دیگر اعتبارسنجی گردید. می‌توان ادعا نمود که در این تحقیق یک تئوری جدید مرتبه بالا برای تحلیل ارتعاشات آزاد ورق‌های هدفمند تخت ارائه شده است.

پس از بررسی و جمع‌بندی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد ورق هدفمند، می‌توان موارد زیر را نتیجه‌گیری کرد:

- تئوری مرتبه بالای ورق هدفمند جدید مورد استفاده در این مقاله می‌تواند با دقت خوبی رفتار دینامیکی ورق تخت را پیش‌بینی کند.
- با افزایش نسبت طول به عرض ورق هدفمند تخت از ۱/۰ تا ۱، فرکانس طبیعی با سرعت زیادی کاهش و با افزایش نسبت طول به عرض ورق هدفمند از مقدار ۱ تا ۲ فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت طول به ضخامت ورق هدفمند فرکانس طبیعی به سرعت کاهش می‌یابد.
- با افزایش مقدار توان تابع تغییرات خواص مواد از ۰/۱ تا ۶ مقدار فرکانس طبیعی ورق هدفمند برای حالت کامل و معیوب مدل اول و معیوب مدل دوم به شدت کاهش یافته و از مقدار ۶ به بعد تابع تغییرات خواص مواد، تغییرات فرکانس طبیعی تقریباً ناچیز است. علت این که بیشترین فرکانس طبیعی مخصوص حالت معیوب مدل اول می‌باشد این است که در معیوب مدل اول خواص ماده به سمت فولاد نزدیکتر می‌شود و همچنین معیوب مدل دوم کمترین مقدار فرکانس طبیعی را دارد که دلیل این رفتار نزدیکتر شدن خواص ماده به سمت آلومینیوم می‌باشد.

۶-مراجع

[1] M. Arefi, and M. Meskini, “Application of hyperbol-

- vibration analysis of functionally graded plates”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 43, 2012, pp. 711-7.
- der shear deformation theory”, *European Physical Journal - Plus*, Vol. 135, No. 1, 2020.
- [14] R. Meksi, S. Benyoucef, A. Mahmoudi, A. Tounsi, and et al., “An analytical solution for bending, buckling and vibration responses of FGM sandwich plates”, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 21, No. 2, 2019, pp. 727-757.
- [15] J. Ehyaei, H. Safarpour, and E. Shahabinejad, “Vibration analysis of a double layer microshell utilizing a modified couple stress theory”, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, Vol. 21, No. 1, 2020, pp. 21-44.
- [16] H. Safarpour, Z. Esmailpoor Hajilak, and M. Habibi, “A size-dependent exact theory for thermal buckling, free and forced vibration analysis of temperature dependent FG multilayer GPLRC composite nanostructures resting on elastic foundation”, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, Vol. 15, No. 3, 2019, pp. 569-583.
- [17] S. C. Chikr, A. Kaci, A. A. Bousahla and ..., “A novel four-unknown integral model for buckling response of FG sandwich plates resting on elastic foundations under various boundary conditions using Galerkin’s approach”, *Geomechanics and Engineering*, Vol. 21, No. 5, 2020.
- [18] D. S. Mashat, A. M. Zenkour, and A. F. Radwan, “A quasi-3D higher-order plate theory for bending of FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loads with porosity”, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 82, 2020.
- [19] L. Hadji, M. Avcar, and N. Zouatnia, “Natural frequency analysis of imperfect FG sandwich plates resting on Winkler-Pasternak foundation”, *Materials Today: Proceedings*, Vol. 53, No. 1, 2022, pp. 153-160.
- [20] D. Singh, and A. Gupta, “Influence of geometric imperfections on the free vibrational response of the functionally graded material sandwich plates with circular cut-outs”, *Materials Today: Proceedings*, Vol. 62, No. 3, 2022, pp. 1496-1499.
- [21] X. Chen, Y. Lu, Z. Wu, Y. Shao, X. Xue, and Y. Wu, “Free vibration of in-plane bi-directional functionally graded materials rectangular plates with geometric imperfections and general elastic restraints”, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 132, 2023.
- [22] H. Chaabani, S. Mesmoudi, L. Boutahar, and K. El Bikri, “A high-order finite element continuation for buckling analysis of porous FGM plates”, *Engineering Structures*, Vol. 279, 2023.
- [23] Abualnour, Moussa, and et al., “A novel quasi-3D trigonometric plate theory for free vibration analysis of advanced composite plates”, *Composite Structures*, Vol. 184, 2018, pp. 688-697.
- [24] Z. Belabed, M. S. A. Houari, and et al., “An efficient and simple higher order shear and normal deformation theory for functionally graded material (FGM) plates”, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 60, 2014, pp. 274-283.
- A. M. A. Neves, A. J. M. Ferreira, and et al., “A quasi-3D sinusoidal shear deformation theory for the static and free