

## تحلیل خزش دیسک‌های دوار ضخامت متغیر ویسکو-هایپرالاستیک

فاطمه اشتواد<sup>۱</sup>، علی حسنی<sup>۲\*</sup>، شهرزاد رحمانی<sup>۳</sup>

۱- کارشناسی ارشد، گروه طراحی جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

۲- استادیار، گروه طراحی جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

۳- استادیار، گروه مهندسی شیمی، دانشکده مهندسی شیمی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

## چکیده

در این تحقیق، پدیده خزش دیسک دوار پلیمری با استفاده از مدل ویسکو-هایپرالاستیک ماکسول تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است. پس از استخراج معادله دیفرانسیل جزئی تعادل لاگرانژی حاکم بر مسئله، تحلیل دیسک دوار با کدنویسی در FlexPDE انجام شد. مدل‌سازی دیسک در ANSYS با کدنویسی در محیط APDL، نشان داد که جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز، تطابق بسیار خوبی با نتایج FlexPDE دارند. مزایای کدنویسی FlexPDE نسبت به انسیس از جمله تحلیل یک‌بعدی تنش‌صفحه‌ای محورمتقارن بجای تحلیل دوبعدی، کاهش هزینه محاسباتی، امکان تعریف ضخامت متغیر (بدون کدنویسی اضافی) و نیاز به تعداد المان‌های کمتر در راستای شعاعی برای رسیدن به دقت مناسب (لزوم بکارگیری ۲۰ المان در FlexPDE در مقایسه با ۱۰۰ المان در ANSYS)، می‌باشد. نشان داده شد با گذر زمان و افزایش سرعت زاویه‌ای، جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز دیسک دوار ناشی از پدیده خزش، افزایش می‌یابد. مشخص شد که با افزایش سرعت زاویه‌ای و کاهش توان در پروفیل ضخامت، مقدار جابجایی و تنش ون-میزز در یک زمان مشخص، افزایش می‌یابد؛ اما تغییر در سرعت زاویه‌ای (به‌عنوان بار اعمالی) و تغییر در پارامتر (به‌عنوان یک مشخصه هندسی)، تأثیر چندانی در زمان آرامش دیسک دوار ندارد.

واژه‌های کلیدی:

خزش؛ مدل ویسکو-هایپرالاستیک ماکسول تعمیم‌یافته، دیسک دوار پلیمری ضخامت متغیر، ANSYS APDL، FlexPDE

## Creep analysis of visco-hyperelastic non-uniform rotating disks

Fatemeh Eshtavad<sup>1</sup>, Ali Hassani<sup>2\*</sup>, Shahrzad Rahmani<sup>3</sup>

1-M.Sc., Department of Solid Design, Faculty of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

2- Assistant Professor, Department of Solid Design, Faculty of Mechanical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

3- Assistant Professor, Department of Chemical Engineering, Faculty of Chemical Engineering, Babol Noshirvani University of Technology, Babol, Iran

## Abstract

This research investigates the creep phenomenon of a polymeric rotating disk using the generalized Maxwell's visco-hyperelastic model. After extracting the Lagrangian partial differential equation of equilibrium governing the problem, the rotating disk was analyzed by scripting in FlexPDE. The disk modelling in ANSYS with coding in the APDL environment showed that the radial displacement and Von-Mises stress are in excellent agreement with the FlexPDE results. The advantages of FlexPDE over ANSYS include one-dimensional analysis of axisymmetric plane stress instead of two-dimensional analysis, reduction of computational cost, possibility of defining variable thickness (without additional coding) and need for fewer elements in the radial direction to achieve acceptable accuracy (necessity of using 20 elements in FlexPDE compared to 100 elements in ANSYS). It was shown that with the passage of time and the increase in angular velocity, the radial displacement and Von-Mises stress of the rotating disk due to the creep phenomenon increase. It was shown that by increasing the angular velocity and decreasing the power in the thickness profile, the displacement and Von-Mises stress at a specific time increase, but the change in angular velocity (as the applied load) and the change in parameter (as a geometric characteristic) do not have much effect on the relaxation time of the rotating disk.

## Keywords

Creep, Generalized Maxwell model of visco-hyperelasticity, Non-uniform polymeric rotating disk, FlexPDE, ANSYS APDL.

## ۱- مقدمه

بارگذاری مکانیکی و حرارتی به‌طور چشمگیری مورد توجه محققان بوده است.

چادوری و گوپتا [۹]، به تحلیل هایپرالاستیک دیسک دوار توپر و حلقوی ضخامت متغیر با تغییر شکل‌های الاستیک بزرگ در مواد تراکم‌ناپذیر با فرض مدل ساختاری مونی-ریولین پرداختند. آن‌ها نشان دادند سرعت زاویه‌ای مجاز برای یک دیسک توپر با ضخامت متغیر، دو برابر بزرگ‌تر از یک استوانه توپر با ضخامت ثابت است که حول محور خود می‌چرخد. اراسلن و همکاران [۱۰] حل تحلیلی دیسک دوار با تغییرات ضخامت نمایی را با فرض ماده سخت‌شونده‌ی خطی و با استفاده از معیار تسلیم ترسکا ارائه کردند. کردخیلی و همکاران [۱۱] تحلیل حرارتی-کشسان دیسک دوار مدرج تابعی را ارائه کردند. آن‌ها معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله را با استفاده از تقسیم‌بندی مجازی دیسک به حلقه‌های (نوارهای) باریک و در نظر گرفتن شرط پیوستگی لازم بین حلقه‌های مجاور و اعمال شرایط مرزی دیسک دوار، به مجموعه‌ای از معادلات جبری خطی برای تعیین حل حرارتی-کشسان تبدیل کردند. حسنی و همکاران [۶]، حل نیمه دقیق دیسک دوار ضخامت متغیر و مدرج تابعی تحت بارگذاری کشسان-حرارتی را با استفاده از روش‌های تحلیلی هموتوپی لیائو، تجزیه آدومیان و تکرار تغییراتی هی با فرض تنش صفحه‌ای حل کردند. نتایج سه روش با نتایج روش عددی رانگ-کوتا، تطابق خوبی داشتند. همچنین حسنی و همکاران [۱۲]، به تحلیل حرارتی-کشسان-مومسان دیسک دوار ضخامت متغیر مدرج تابعی با فرض ماده‌ی الاستیک-سخت شونده‌ی خطی با بکارگیری روش تحلیلی هموتوپی لیائو و روش رانگ-کوتا و المان محدود ANSYS، پرداختند. آن‌ها از توزیع دما به فرم توانی با دمای بیشتر در لبه‌ی خارجی دیسک، استفاده کردند. سلمانی تهرانی و همکاران [۱۳] بررسی تحلیلی اثرات تغییر چگالی، تنش تسلیم و نسبت شعاع داخلی به خارجی بر الگوی شروع تسلیم استوانه مدرج تابعی دوار

دیسک‌های دوار در صنایع مختلف از جمله هوافضا، پمپ و کمپرسورهای سانتریفیوژ، روتورها [۱]، دیسک ترمز و کلاچ [۲] و توربوجت، توربوپراپ، توربوفن [۳] کاربردهای فراوانی دارند. قرقره‌ها و دیسک‌های ذخیره‌سازی رایانه نیز به‌عنوان نمونه‌هایی از کاربرد اجزای ویسکو-الاستیک دیسک دوار در نظر گرفته می‌شوند [۴]. دیسک‌های دوار را از نظر ضخامت به سه دسته ضخامت ثابت، ضخامت متغیر خطی و غیرخطی می‌توان تقسیم کرد [۵]. همچنین با تقسیم‌بندی از نگاه نوع بار وارده، بارهای مکانیکی، حرارتی و ترمومکانیکی را می‌توان در نظر گرفت [۴].

در اکثر کاربردهای دیسک دوار، سرعت دورانی بالا مد نظر است [۶]؛ برای مثال در توربین‌ها، دیسک با سرعت زاویه‌ای زیادی دوران پیدا می‌کند به‌طوری که در توربین فضاپیماها تجربه سرعت صدهزار دور بر دقیقه، امری عادی است که موجب نیروی گریز از مرکز بزرگ و تنش‌های شدیدی در دیسک می‌شود [۷]. از آنجاییکه در شرایط سرعت دورانی یکسان، تنش در دیسک دوار ضخامت متغیر به‌طور قابل توجهی از دیسک دوار ضخامت ثابت کمتر است، عمدتاً از دیسک دوار ضخامت متغیر استفاده می‌شود [۶]. کم بودن وزن دیسک، برای بهبود کارکرد دستگاه در صنایع هوایی و همچنین در نظرگیری هزینه‌های اقتصادی، موجب می‌شود که در طراحی دیسک‌های ضخامت متغیر، بیشترین ضخامت را لبه درگیر داخلی دیسک داشته باشد [۲، ۸]. اعمال پروفیل کاهش‌ی در ضخامت دیسک دوار موجب می‌شود که جرم بیشتر در شعاع کمتر قرار گیرد و در نتیجه منجر به کاهش حداکثر تنش اعمالی به دیسک دوار گردد. کارکرد دیسک در دمای بالا و سرعت دورانی زیاد، منجر به ایجاد تنش‌های مکانیکی و حرارتی قابل توجه در دیسک دوار می‌گردد؛ این در حالیست که دمای بالا موجب افت خواص مکانیکی ماده سازنده‌ی دیسک می‌گردد. لذا تحلیل تنش-کرنش دیسک‌های دوار ناشی از

بار مکانیکی ثابت با گذر زمان، و پدیده آرامش تنش، یعنی کاهش تنش سازه تحت تغییرشکل ثابت با گذر زمان، با استفاده از معادلات ساختاری ویسکوالاستیک و ویسکوپلاستیک امکان پذیر است. کارکرد قطعات تحت بارگذاری مکانیکی برای یک دوره‌ی زمانی طولانی، منجر به ایجاد تغییرشکل‌های ناخواسته ناشی از پدیده‌ی خزش در ماده‌ی سازنده قطعات از جمله دیسک‌ها و سیلندرهای دوار می‌گردد که این پدیده، می‌تواند منجر به از دست رفتن کارایی سازه گردد. تلاش‌هایی برای مدل‌سازی پدیده خزش در دیسک و سیلندر دوار در ادبیات به چشم می‌خورد.

فنگ [۱۷]، در بررسی تماس غلتشی دیسک‌های دوار ویسکوالاستیک ضخامت ثابت با فرض کرنش‌های بزرگ و ماده‌ی تراکم‌ناپذیر، با استفاده از معادلات ویسکوالاستیک کریستینسن و فرض‌نمایی بودن تابع رهايش و حل انتگرال درونی به‌صورت بازگشتی، معادلات حاکم بر مسئله را به‌دست آورد. الام و همکاران [۱۸]، به تحلیل دیسک دوار ضخامت متغیر ویسکوالاستیک پرداختند و به کمک رابطه تنش-کرنش خطی هوکین، نتایج عددی برای جابجایی و تنش شعاعی پروفیل‌های مختلف دیسک را به‌دست آوردند. همچنین، به تحقیق درباره تنش‌ها، در دیسک دوار ضخامت متغیر متحمل پوشش ویسکوالاستیک هم‌محور پرداختند و در ادامه، راهکارهای تحلیلی برای دیسک‌های حلقوی ضخامت متغیر ویسکوالاستیک ارتوتروپیک را ارائه نمودند. گانگولی و همکاران [۱۹]، المان شافت جدیدی را برای دیسک ویسکوالاستیک خطی ضخامت ثابت با کرنش‌های حقیقی پیشنهاد دادند که در آن، مدل ویسکوالاستیک ماکسول-ویچرت متشکل از یک شاخه الاستیک و سه شاخه المان ماکسول، به‌کار رفته است. آن‌ها علاوه بر در نظر گرفتن کرنش و نرخ کرنش الاستیک، یک کرنش اضافی به همراه نرخ آن در نظر گرفته که به‌صورت مجازی، جابجایی دارند و در تحلیل

بر اساس تئوری تغییرشکل‌های کوچک در حالت کرنش صفحه‌ای و بر مبنای معیار تسلیم ترسکا با فرض مدول یانگ، چگالی و تنش تسلیم به‌صورت توابع نمایی را انجام دادند. آن‌ها نشان دادند که پارامترهای هندسی و مادی بر ترتیب تنش‌ها و چگونگی شروع تسلیم، تاثیرگذار است. حسنی و همکاران [۲]، حل تحلیلی و عددی دیسک دوار مدرج تابعی ضخامت متغیر در معرض بار حرارتی و فشار جانبی را با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی میندیلین ارائه کردند. آن‌ها پس از استخراج معادلات حاکم بر مسئله، با استفاده از روش تحلیلی هموتوپی لیائو، روش تحلیلی تجزیه آدمیان، روش عددی رانگ-کوتا و روش المان محدود انسیس، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله را حل کردند و اثرات دما، شاخص درجه‌بندی ماده، سرعت زاویه‌ای و بار جانبی را بر مولفه‌های جابجایی و تنش ارائه داده و بحث نمودند.

استفاده از مدل‌های ساختاری مواد جامد ارائه‌کننده‌ی خواص توأمان الاستیک و ویسکوز، تحت عنوان کلی مواد ویسکوالاستیک، چندین دهه است که توسط محققان شروع شده و در حال گسترش و بهبود به منظور پیش‌بینی بهتر پدیده‌های خزش و آرامش تنش با دقت بیشتر و هزینه محاسباتی کمتر می‌باشد. نمونه‌ای از تلاش برای بهینه‌سازی مدل‌های ساختاری ویسکوالاستیک در سال‌های اخیر، استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری به‌جای معادلات دیفرانسیل با مشتقات مرتبه‌ی صحیح می‌باشد (برای مثال [۱۴، ۱۵]). همچنین از مواد دارای خاصیت ویسکوز، به‌دلیل ذات مستهلک‌کنندگی انرژی که دارند در سازه‌های ارتعاشی به‌عنوان میراکننده در تکیه‌گاه‌ها استفاده می‌شوند که لازمه آن بکارگیری معادلات ساختاری حاکم بر مواد ویسکوالاستیک به‌جای مواد الاستیک می‌باشد (برای مثال بکارگیری ماده‌ی ویسکوالاستیک کلون-ویت تعمیم‌یافته‌ی خطی در [۱۶]). مدل‌سازی پدیده خزش، یعنی تغییر شکل سازه تحت

استحکام تسلیم کمتر در جهات شعاعی و محیطی نسبت به جهت محوری را ارائه دهد، در کاهش تنش‌های ناشی از خزش و نرخ خزش در دیسک دوار در مقایسه با دیسک مدرج تابعی همسانگرد مفید می‌باشد.

برای حل دیسک‌های دوار ضخامت متغیر ویسکو-الاستیک در محدوده غیرخطی، به دلیل پیچیدگی معادلات حاکم بر مسئله معمولاً از رویکرد عددی شامل استفاده از نرم‌افزارهای تجاری یا کدنویسی در محیط زبان‌های برنامه‌نویسی استفاده می‌شود. تاکنون، نرم‌افزارهای تجاری ANSYS و Abaqus در این زمینه بیشتر مورد توجه بوده‌اند و تحلیل خزش دیسک دوار ضخامت متغیر ویسکو-هایپروالاستیک با کدنویسی در محیط FlexPDE انجام نشده است. به‌طور کلی یکی از مزایای FlexPDE این است که مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی که در نرم‌افزارهای تجاری نظیر ANSYS و Abaqus المانی برای آنها تعریف نشده است، امکان‌پذیر است. برای مثال، برای تحلیل پدیده تخریب حجمی مواد پلیمری تخریب‌پذیر تراکم‌ناپذیر [۲۶، ۲۵] و تخریب‌پذیر تراکم‌پذیر [۲۷]، هیچ المانی در ANSYS تعریف نشده است و برای تحلیل رفتار مکانیکی پلیمرهای زیست‌تخریب‌پذیر ناشی از کشیدگی (و تحت اثر رطوبت مشخص) به دلیل عدم حضور المان از پیش تعریف‌شده در Abaqus مجبور به کدنویسی در سابروتین UMAT هستیم [۲۸]. همچنین ممکن است که المانی در ANSYS تعریف شده باشد، اما قابلیت‌های محدودی برای آن در نظر گرفته شده باشد. برای مثال، مطالعه مواد پروالاستیک در ANSYS از طریق المان‌های دوبعدی مرتبه اول CPT<sub>212</sub> و مرتبه دوم CPT<sub>213</sub>، برای فقط حالات محور-مقارن و کرنش-صفحه‌ای امکان‌پذیر است [۲۹]. اما امکان مطالعه تغییرات درصد تخلخل ناشی از بارگذاری در حالت دوبعدی و تحلیل سه‌بعدی مواد پرو-هایپروالاستیک در ANSYS وجود ندارد [۳۰]. همچنین در ANSYS امکان تغییر خواص ماده ناشی از گذر زمان و یا تغییرات بارگذاری

المان محدود از آن بهره برده‌اند. بوزاس و فونچراتو [۲۰]، برای بررسی وابستگی توزیع تنش با خواص ویسکوز، در یک چارچوب نظری و عددی و با فرض کرنش‌های بزرگ، یک فرمول‌بندی المان محدود برای چرخ‌نورد ویسکو-الاستیک در نظر گرفتند. آن‌ها نتیجه گرفتند که حداکثر اتلاف قدرت به‌عنوان تابعی از سرعت، ضریب اصطکاک و ویسکوزیته می‌باشد. توکلی و همکاران [۲۱]، به مطالعه ماتریس بین‌لایه‌ای یک دیسک دوار ویسکو-الاستیک خطی دارای فیبر در جهات شعاعی و محیطی پرداختند و با فرض کرنش کوچک، مشخصات ویسکو-الاستیک آن را با آزمون خزش با نرخ‌های متفاوت تعیین نمودند. آن‌ها با آزمایش، نتیجه گرفتند هرچه نرخ کرنش بالاتر باشد، سختی ماتریس بین‌لایه‌ای افزایش پیدا می‌کند و کمتر بودن نرخ کرنش، سبب جذب انرژی بیشتر می‌شود. ژرفی و همکاران [۲۲]، با در نظر گرفتن رژیم اولیه و ثانویه خزش، تغییر شکل دیسک دوار مدرج تابعی Al-SiC را با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته، مطالعه کردند. آنها معادلات خزش بر پایه‌ی جابجایی با استفاده از معادلات تعادل، ساختاری و کرنش-جابجایی به‌دست آوردند و نشان دادند که نرخ خزش، به مقدار دما و درصد ذرات تقویت‌کننده، بستگی دارد. کوهلی و همکاران [۲۳] تحلیل خزش سیلندر کامپوزیت Al-SiCp تحت فشار داخلی را با فرض کرنش‌های بزرگ هنکی انجام دادند. آنها نشان دادند که اگر کرنش‌های بزرگ امکان‌پذیر باشد، طراحی سیلندر بر مبنای تئوری کرنش‌های کوچک به نتایج غیرقابل اطمینان، منجر می‌گردد. خان‌ا و همکاران [۲۴] تاثیر ناهمسانگردی بر خزش دیسک دوار ضخامت متغیر مدرج تابعی Al-SiC<sub>w</sub> را مطالعه کردند. آن‌ها فرض کردند که ضخامت و مقدار تقویت‌کننده‌ی SiC<sub>w</sub> با قانون توانی در راستای شعاعی، کاهش می‌یابد و همچنین از معیار تسلیم هیل استفاده کردند. آن‌ها نشان دادند که حضور نوعی ناهمسانگردی که در آن ماده‌ی دیسک،

متغیر همانند آنچه که در ANSYS نیاز است، نمی‌باشد. در ادامه‌ی کار، تاثیر فرایند خزش با گذر زمان بر تغییرات مساحت سطوح اصلی، تنش‌های محیطی، شعاعی و ون-میزز و تاثیر سرعت زاویه‌ای بر جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز و همچنین تاثیر پروفیل ضخامت بر جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز، بررسی شده و نتایج آن‌ها، تفسیر گردیده است.

## ۲- معادلات حاکم بر دیسک دوار ویسکو-هایپرالاستیک

از آنجایی که دیسک دوار دارای ضخامت ناچیز در مقایسه با ابعاد دیگر می‌باشد، فرض حالت تنش صفحه‌ای، متداول است [۱، ۶، ۱۲]. همچنین به دلیل تقارن بارگذاری، هندسه و شرایط مرزی نسبت به محور دوران، حالت محورمتقارن حاکم می‌باشد. از مدل ساختاری جامد ویسکو-هایپرالاستیک ماکسول تعمیم‌یافته برای دیسک دوار ضخامت متغیر پلیمری در حالت دما-ثابت، تحت سرعت زاویه‌ای ثابت، استفاده شده است. لازم به ذکر است که باتوجه به کرنش‌ها و تغییر شکل‌های بزرگ در ماده پلیمری، معادلات حاکم بر مسئله در توصیف اوپلری و لاگرانژی یکسان نیستند. در مکانیک جامدات، معمولاً از معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر توصیف لاگرانژی (پیکربندی مرجع) برای حل مسئله استفاده می‌گردد. بنابراین لازم است که معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم بر مسئله در پیکربندی جاری به معادلات تعادل لاگرانژی متناظر، تبدیل گردند. معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر تعادل دیسک دوار ضخامت متغیر تنش-صفحه‌ای در توصیف اوپلری به صورت معادله (۱) بیان می‌شود [۶، ۱۲]:

$$\frac{d[h(r)r\sigma_r]}{dr} - h(r)\sigma_\theta + h(r)\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (1)$$

که  $h(r)$  ضخامت متغیر دیسک دوار می‌باشد و  $(r, \theta, z)$  مختصات اوپلری در دستگاه استوانه‌ای و همچنین  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$

وجود ندارد؛ به عبارت دیگر، خواص ماده در ANSYS مقادیر ثابتی هستند. مانند ضریب نفوذپذیری ماده پرو-هایپرالاستیک که منطقاً با افزایش درصد حجمی منافذ باید افزایش یابد (برای مثال از طریق رابطه نرمال‌شده کوزنی-کارمن<sup>۱</sup>). اساساً چنین محدودیت‌هایی در استفاده از FlexPDE موضوعیت ندارد.

مطالعات دیسک دوار ویسکو-الاستیک صورت گرفته در کارهای قبلی، عمدتاً دیسک‌هایی با ضخامت ثابت و یا دیسک‌های ویسکو-الاستیک خطی با کرنش‌های کوچک را در نظر می‌گیرند. این در حالیست که در مواد نرم (مانند بسیاری از پلیمرها)، کرنش‌های بزرگ ناشی از بارگذاری مکانیکی، بسیار محتمل است. در این پژوهش، با استفاده از مدل ساختاری ماکسول تعمیم‌یافته برای تحلیل دیسک دوار ویسکو-هایپرالاستیک پلیمری و با بکارگیری مدل ساختاری نئو-هوکین برای شاخه‌ی الاستیک ماکسول تعمیم‌یافته، مولفه‌های میدان جابجایی، کشیدگی‌ها، تنش‌ها، استخراج شدند. پس از استخراج معادلات دیفرانسیل جزئی تعادل لاگرانژی حاکم بر مسئله، با استفاده از کدنویسی در نرم‌افزار FlexPDE، مسئله مقدار اولیه-مرزی حاکم، حل شدند. نتایج با نتایج کدنویسی در ANSYS APDL مقایسه شده است. تا آنجایی که نویسندگان اطلاع دارند، تحلیل خزش دیسک دوار ضخامت متغیر با استفاده از مدل ویسکو-هایپرالاستیک ماکسول تعمیم‌یافته با کدنویسی در FlexPDE، انجام نشده است. در تحقیق حاضر، مزیت استفاده از FlexPDE نسبت به کدنویسی در ANSYS APDL در این است که به جای استفاده از المان دوبعدی تنش‌صفحه‌ای برای مدل‌سازی دیسک دوار محور-متقارن، می‌توان از المان یک‌بعدی تنش-صفحه‌ای محور-متقارن استفاده کرد که این به نوبه خود، هزینه محاسباتی را به شدت کاهش می‌دهد. همچنین نیاز به کدنویسی اضافی برای اعمال ضخامت

<sup>۱</sup>Normalized Kozeny-Carman formula

$$\sigma = J^{-1} P F^T \quad (7)$$

که  $F$  و  $J = \det(F)$ ، به ترتیب تانسور گرادیان تغییر شکل و کسر حجمی می‌باشد.

با جای‌گذاری رابطه‌ی (۷) در معادله (۶)، خواهیم داشت:

$$\left[ \text{div}(h J^{-1} P F^T) \right]_r + h \rho r \omega^2 = 0 \quad (8)$$

معادله تعادل دیفرانسیلی (۸)، با استفاده از روابط (۲) و (۳) و همچنین رابطه‌ی کلیدی  $\text{div}(J^{-1} F^T) = 0$  و با کمی محاسبات ریاضی، به صورت رابطه (۹) که بیانگر معادله تعادل دیفرانسیلی حاکم بر دیسک دوار ضخامت متغیر در توصیف لاگرانژی است، تبدیل می‌شود:

$$\left[ \text{Div}(H P) \right]_R + H \rho_0 (R + U_R) \omega^2 = 0 \quad (9)$$

که  $H(R)$ ، ضخامت دیسک دوار بر حسب متغیر شعاعی لاگرانژی  $R$  است. بسط معادله دیفرانسیل تعادل لاگرانژی در دستگاه استوانه‌ای با توجه به تقارن حول محور دوران  $Z$  خواهد شد:

$$\frac{d(HP_{rR})}{dR} + \frac{H(P_{rR} - P_{\theta\theta})}{R} + H \rho_0 (R + U_R) \omega^2 = 0 \quad (10)$$

که  $P_{rR}$  و  $P_{\theta\theta}$  به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و محیطی تنش کل پیولا-کریشهف اول، هستند. تانسور گرادیان تغییر شکل  $F$ ، تانسور تغییر شکل کوشی-گرین چپ  $B$  و تانسور کرنش لاگرانژی  $\epsilon$  در دیسک دوار محور متقارن بر حسب تنها مؤلفه‌های جابجایی غیرصفر، یعنی  $U_R$ ، به صورت روابط (۱۱) محاسبه می‌شود:

$$\frac{d(HP_{rR})}{dR} + \frac{H(P_{rR} - P_{\theta\theta})}{R} + H \rho_0 (R + U_R) \omega^2 = 0 \quad (11)$$

به ترتیب مؤلفه‌های شعاعی و محیطی تنش کوشی در دستگاه استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  هستند.

حال باید توصیف لاگرانژی معادله دیفرانسیلی تعادل اویلری حاکم بر دیسک دوار، یعنی معادله (۱)، را به دست آورد. داریم:

$$r = R + U_R \quad (2)$$

که  $(r, \theta, z)$  توصیف لاگرانژی مختصات استوانه‌ای می‌باشد.  $U_R$  مؤلفه جابجایی شعاعی در پیکربندی مرجع است. همچنین رابطه چگالی جاری و چگالی مرجع به صورت معادله (۳) بیان می‌شود [۳۱]:

$$\rho_0 = J \rho \quad (3)$$

ترم اول در معادله دیفرانسیلی (۱) به صورت معادله (۴) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \frac{d[h(r)r\sigma_r]}{dr} &= \frac{dh}{dr} r \sigma_r + \frac{dr}{dr} h \sigma_r + h r \frac{d\sigma_r}{dr} \\ &= \frac{dh}{dr} r \sigma_r + h \sigma_r + h r \frac{d\sigma_r}{dr} \end{aligned} \quad (4)$$

با جای‌گذاری رابطه (۴) در معادله (۱) و بعد از ساده‌سازی، معادله دیفرانسیل تعادل (۱) به صورت معادله (۵) خواهد شد:

$$\frac{d(h\sigma_r)}{dr} + \frac{h(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + h \rho r \omega^2 = 0 \quad (5)$$

فرم پایای معادله (۵) به صورت زیر است:

$$\left[ \text{div}(h\sigma) \right]_r + h \rho r \omega^2 = 0 \quad (6)$$

که  $[\text{div}(h\sigma)]_r$ ، مؤلفه شعاعی دیورژانس است. رابطه تنش کوشی و تنش پیولا-کریشهف اول به صورت زیر است [۳۱]:



$$S = S_{vol}^{\infty} + S_{iso}^{\infty} + \sum_{i=1}^m Q_i \quad (12)$$

هولزافیل، با الهام از معادله تحول در مدل رئولوژیکی ماکسول تعمیم یافته‌ی یک بعدی، معادله تحول حاکم بر متغیر تانسوری  $Q_i$  برای مواد ویسکو-هایپرالاستیک با زنجیره‌های پلیمری یکسان (از قبیل الاستومرهای ترموپلاستیک) را به صورت زیر ارائه کرد [۳۲، ۳۳]:

$$\dot{Q}_i + \frac{Q_i}{\tau_i} = \beta_i^{\infty} \dot{S}_{iso}^{\infty}; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13)$$

که  $\beta_i^{\infty} \in [0, \infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  ضریب انرژی کرنشی بی بعد متناظر با زمان رهایش  $\tau_i, i = 1, 2, \dots, m$  برای المان‌های ماکسول  $\tau_i, i = 1, 2, \dots, m$  می‌باشند. دو ثابت  $\beta_i^{\infty}$  و  $\tau_i$  توصیف کننده رفتار ویسکوالاستیک شاخه‌ی ام، می‌باشند. همچنین لازم به ذکر است تفسیر فیزیکی ضریب انرژی کرنشی بی بعد  $\beta_i^{\infty}$ ، به صورت نسبت سفتی برشی المان (شاخه)  $i$ ام ( $\mu_i$ ) به سفتی برشی شاخه الاستیک ( $\mu_{\infty}$ ) می‌باشد.

شرایط اولیه برای معادله تحول (۱۳) به صورت زیر می‌باشد [۳۳]:

$$Q_i(0^+) = \beta_i^{\infty} S_{iso}^{\infty}(0^+); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

حال، با استفاده از روابط (۷) و (۱۲)، تانسور تنش کل پیولا-کریشهف اول، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P &= P_{vol}^{\infty} + P_{iso}^{\infty} + \sum_{i=1}^m F \cdot Q_i \\ &= J \sigma_{vol}^{\infty} \cdot F^{-T} + J \sigma_{iso}^{\infty} \cdot F^{-T} \\ &+ \sum_{i=1}^m (F \cdot Q_i) \end{aligned} \quad (15)$$

بخش‌های حجمی و اعوجاجی تانسور تنش کوشی برای شاخه الاستیک در ماده ویسکو-هایپرالاستیک بر مبنای

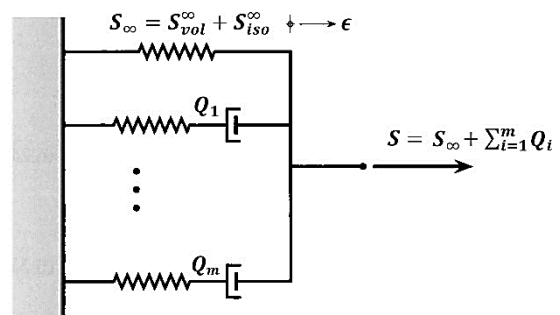
$$B = FF^T = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\partial U_R}{\partial R}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{U_R}{R}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz}^2 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{F^T F - I}{2} = \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\partial U_R}{\partial R}\right)^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{U_R}{R}\right)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz}^2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-11)$$

که  $F_{zz}$  با استفاده از فرض تنش-صفحه‌ای در دیسک دوار، یعنی  $\sigma_z = 0$ ، در روال تحلیل مسئله، تعیین می‌گردد.

فرمول بندی مدل ویسکو-هایپرالاستیک ماکسول تعمیم یافته با استفاده از بخش‌های حجمی و اعوجاجی تانسور تنش پیولا-کریشهف دوم متناظر با شاخه الاستیک (یعنی  $S_{vol}^{\infty}$  و  $S_{iso}^{\infty}$ ) و تنش‌های غیر-تعادلی تانسور تنش پیولا-کریشهف دوم مربوط به المان (های) ماکسول (یعنی  $\sum_{i=1}^m Q_i$ )، بنا شده است. مدل

رئولوژیکی ماکسول تعمیم یافته یک بعدی با یک فنر آزاد در یک شاخه و  $m$  المان ماکسول که به صورت موازی چیده شده‌اند، در شکل ۱ نشان داده شده است [۳۲].



شکل ۱- مدل رئولوژیکی ماکسول تعمیم یافته یک بعدی تانسور تنش پیولا-کریشهف دوم کل در مدل ماکسول تعمیم یافته، به صورت زیر می‌باشد [۳۲، ۳۳]:

مدل ساختاری نئو-هوکین، به صورت زیر می‌باشد [۳۱]:

$$P_{rR} = J p F_{rR}^{-T} + \mu_0 J^{\frac{2}{3}} \left[ B_{rr} - \frac{1}{3} tr(B) \right] \cdot F_{rR}^{-T} + \sum_{i=1}^m [F_{rR}(Q_i)_{RR}]$$

$$\sigma_{vol}^{\infty} = pI \quad (16)$$

$$\sigma_{iso}^{\infty} = \mu_0 J^{\frac{5}{3}} dev(B)$$

که  $\mu_0$  برابر با مدول برشی شاخه الاستیک در مدل ماکسول تعمیم‌یافته و کمیت اسکالر  $p$ ، مقادیر قطری تانسور  $\sigma_{vol}^{\infty}$  می‌باشد که در این تحقیق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۹]:

$$p = K(J-1) \quad (17)$$

که  $K$  مدول حجمی ماده پلیمری است.

با جای‌گذاری رابطه (۱۶) در رابطه (۱۵)، تانسور تنش

کل پیولا-کریشهف اول، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P = J p F^{-T} + \mu_0 J^{\frac{2}{3}} dev(B) \cdot F^{-T} + \sum_{i=1}^m (F \cdot Q_i) \quad (18)$$

مؤلفه‌های شعاعی و محیطی تانسور تنش که در معادله دیفرانسیلی تعادل لاگرانژی (۱۰) حضور دارند، با استفاده از رابطه (۱۹) به دست می‌آیند:

که  $tr(B)$ ، اثر تانسور  $B$  می‌باشد که برابر با مجموع عناصر قطری تانسور  $B$  است.

تانسورهای  $S_{vol}^{\infty}$  و  $S_{iso}^{\infty}$  بر مبنای مدل ساختاری نئو-هوکین به کمک بخش‌های حجمی و اعوجاجی تانسور تنش کوشی (۱۶) و با توجه به رابطه‌ی تنش کوشی و تنش پیولا-کریشهف دوم، به صورت زیر خواهد شد:

$$S_{vol}^{\infty} = J F^{-1} \sigma_{vol}^{\infty} F^{-T} = J p F^{-1} F^{-T} = J p C^{-1}$$

$$S_{iso}^{\infty} = J F^{-1} \sigma_{iso}^{\infty} F^{-T} \quad (20)$$

$$= J F^{-1} \left[ \mu_0 J^{\frac{5}{3}} dev(B) \right] F^{-T}$$

$$= \mu_0 J^{\frac{2}{3}} F^{-1} \cdot dev(B) \cdot F^{-T}$$

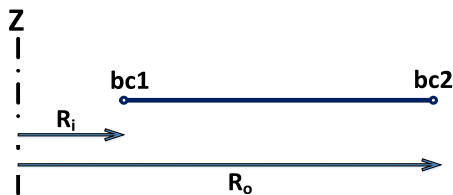
حال، تنش کل پیولا-کریشهف دوم متناظر با مدل نئو-هوکین با جای‌گذاری رابطه (۲۰) در رابطه (۱۲)، به صورت زیر به دست می‌آید:



در دیسک‌های دوار ضخامت متغیر ویسکو-هایپروالاستیک، به‌دلیل تقارن هندسه، شرایط مرزی و بارگذاری نسبت به محور دیسک، هیچ تغییراتی در مولفه‌های جابجایی، کرنش، تنش در راستای محیطی وجود ندارد و بنابراین حالت محور-متقارن در دیسک دوار ضخامت متغیر، مفروض است. با توجه به حالت تنش-صفحه‌ای و محور-متقارن حاکم بر دیسک دوار، همه کمیت‌های اسکالر و تانسوری فقط وابسته به شعاع دیسک دوار و زمان می‌باشند. بنابراین، در کدنویسی FlexPDE، مدل یک-بعدی به‌صورت یک خط از موقعیت  $(R_i, 0)$  تا  $(R_o, 0)$  مطابق شکل ۲ در نظر گرفته می‌شود که  $R_o$  و  $R_i$ ، به ترتیب شعاع‌های داخلی و خارجی دیسک دوار می‌باشد.

شرایط مرزی متعارف در دیسک‌های دوار به‌صورت گیردار در لبه داخلی و آزاد در لبه خارجی می‌باشد. مطابق شکل ۲، در لبه داخلی دیسک  $(bc1)$ ، جابجایی شعاعی به‌عنوان شرط مرزی ضروری برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود و در لبه خارجی دیسک  $(bc2)$ ، تنش شعاعی به‌عنوان شرط مرزی طبیعی برابر با صفر می‌باشد. بنابراین، شرایط مرزی در دیسک دوار به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} U_R &= 0 & \text{at } R &= R_i \\ \sigma_{rr} &= P_{rR} = 0 & \text{at } R &= R_o \end{aligned} \quad (23)$$



شکل ۲- مدل هندسی و شرایط مرزی در نظر گرفته شده در FlexPDE برای حل مسئله دیسک دوار ضخامت متغیر ویسکو-الاستیک با کرنش‌های بزرگ در FlexPDE، جابجایی شعاعی  $U_R$ ، کمیت اسکالر  $p$ ، مؤلفه محوری تانسور گرادینان تغییر شکل، مؤلفه‌های شعاعی تنش غیرتعدالی المان‌های (شاخه‌های

$$S = J p C^{-1} + \mu_0 J^{\frac{2}{3}} F^{-1} \cdot dev(B) \cdot F^{-T} + \sum_{i=1}^m Q_i \quad (21)$$

باتوجه به اینکه دیسک دوار محور متقارن به‌دلیل ضخامت ناچیز در مقابل با ابعاد دیگر دیسک، با فرض تنش صفحه‌ای مطالعه می‌گردد، تنش کوشی  $\sigma_z$  و در نتیجه تنش پیولا-کریشهف دوم  $S_z$  برابر با صفر هستند، بنابراین مولفه‌ی محوری تنش پیولا-کریشهف دوم بر طبق رابطه (۲۱)، به‌صورت زیر برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود:

$$S_z = J p C_z^{-1} + \mu_0 J^{\frac{2}{3}} F_{zz}^{-1} [dev(B)]_{zz} F_{zz}^{-1} + \sum_{i=1}^m [Q_i]_z = 0 \quad (22)$$

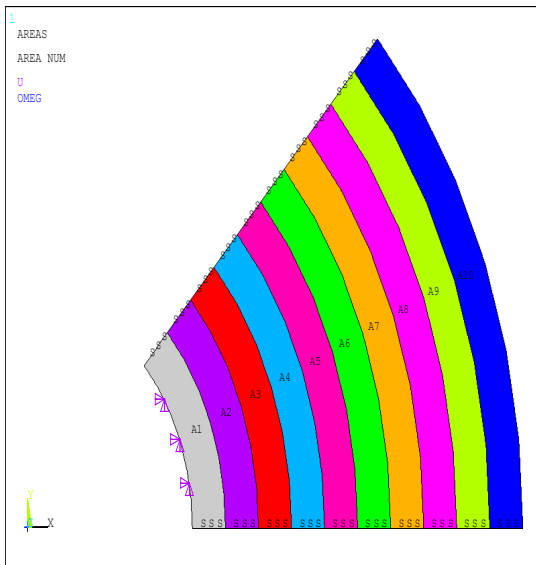
رابطه (۲۲) به عنوان قیدی که همواره باید برقرار باشد، برای تعیین مؤلفه  $F_{zz} = \sqrt{B_z}$  در حل مسئله در FlexPDE استفاده می‌شود.

### ۳- تحلیل مسئله با کدنویسی در FlexPDE

تحلیل پدیده‌های خطی و غیرخطی در حالت پایا و گذرا و همچنین تحلیل مسائل مقدار ویژه خطی در فضای یک-، دو- و سه-بعدی با کدنویسی در FlexPDE امکان‌پذیر می‌باشد. لازم به ذکر است که FlexPDE محدودیتی در تعداد درجات آزادی و معادلات جبری و دیفراسیلی حاکم بر مسئله ندارد؛ به‌طوری که پس از تعریف درجات آزادی (با مرتبه ۱، ۲ یا ۳)، معادلات قید (در صورت لزوم)، معادلات حاکم بر مسئله، هندسه مدل، شرایط اولیه و شرایط مرزی، مسئله با استفاده از روش المان محدود استاندارد گالرکین<sup>۱</sup>، حل می‌گردد. المان‌های مثلثی و چهاروجهی به ترتیب در فضای دوبعدی و سه‌بعدی، مورد استفاده قرار می‌گیرند [۳۴].

<sup>۱</sup>Standard Galerkin finite element method (SGFEM)

است، برای مدل‌سازی دیسک دوار با ضخامت متغیر، لازم است که در محیط APDL کدنویسی انجام گیرد. در کدنویسی با ایجاد حلقه‌هایی<sup>۲</sup>، سطوح قطاعی مورد نیاز در راستای شعاعی مطابق شکل ۱-۳ تولید می‌گردد. سپس در بخش ثوابت حقیقی<sup>۳</sup>، ضخامت‌های ثابت متناظر با پروفیل ضخامت که به طور تدریجی از ضخامت در شعاع داخلی به ضخامت در شعاع خارجی کاهش می‌یابد، تولید می‌گردد. با انتصاب ضخامت‌های تعریف‌شده در بخش ثوابت حقیقی به سطوح قطاعی متناظر (نشان داده شده در شکل ۱-۳) و مش‌بندی منظم<sup>۴</sup>، مطابق شکل ۲-۳، مدل ایجاد می‌گردد. شکل ۳-۳، مدل هندسی، شرایط مرزی، مش‌بندی دیسک دوار، بارگذاری سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که تقسیم‌بندی دیسک دوار به ۱۰ سطح که در شکل ۱-۳ الی شکل ۳-۳ نشان داده شده است، فقط جهت نمایش انتخاب شده است و تقسیمات واقعی، به منظور دستیابی به همگرایی مش، بیشتر می‌باشد.



شکل ۱-۳- گسسته‌سازی سطح دیسک دوار به چندین سطح در راستای شعاعی جهت اعمال ضخامت متغیر

ماکسول  $[Q_i]_R, i=1,2,\dots,m$  و مؤلفه‌های محیطی تنش غیرتعدالی (ویسکوز) شاخه‌های ماکسول  $[Q_i]_0, i=1,2,\dots,m$ ، به‌عنوان متغیرهای اولیه (درجات آزادی) در کدنویسی، به‌ترتیب با مرتبه‌ی میان‌یابی برابر با ۲، ۱، ۱، ۱ و ۱، تعریف می‌شوند. همچنین معادلات حاکم بر مسئله، به ترتیب معادله تعادل دیفرانسیلی لاگرانژی (۱۰)، رابطه جبری (۱۷)، قید (۲۲) و معادلات دیفرانسیلی تحول (۱۳) در راستاهای شعاعی و محیطی برای همه‌ی شاخه‌های ماکسول  $i=1,2,\dots,m$ ، تعریف می‌شوند. شرایط مرزی (۲۳) برای جابجایی شعاعی و شرایط اولیه (۱۴) برای مؤلفه‌های شعاعی و محیطی تنش‌های غیرتعدالی همه شاخه‌های ماکسول  $i=1,2,\dots,m$ ، در نظر گرفته می‌شوند. FlexPDE، مسئله را با استفاده از روش استاندارد المان محدود گالرکین حل می‌کند.

#### ۴- تحلیل مسئله با کدنویسی در ANSYS APDL

به‌دلیل حالت محور-متقارن در دیسک دوار، برای جلوگیری از افزایش هزینه محاسباتی به‌جای مدل‌سازی دیسک دوار به‌صورت یک قرص کامل ۳۶۰ درجه، از یک قطاع ۴۵ درجه، استفاده می‌گردد. لبه داخلی دیسک به‌صورت گیردار و لبه بیرونی آن به‌صورت آزاد می‌باشد و قید تقارن، در لبه  $\Theta = 0$  و  $\Theta = \pi/4$ ، اعمال می‌گردد. از المان PLANE182 با فعال کردن گزینه‌ی حالت تنش صفحه‌ای با تعیین ضخامت، استفاده می‌گردد. المان PLANE182، یک المان مرتبه اول است که در اینجا به‌صورت چهارگوشه<sup>۱</sup>، به‌کار گرفته می‌شود. سرعت زاویه‌ای به‌عنوان بارگذاری خارجی در مسئله تعریف می‌گردد. ضخامت در راستای شعاعی، مطابق پروفیل ضخامت در نظر گرفته‌شده، به‌طور تدریجی از لبه داخلی به لبه بیرونی، تغییر داده می‌شود. از آنجایی که در AN-SYS المان تنش صفحه‌ای با ضخامت ثابت، تعریف شده

۱ Quadrilateral

۲ Loops

۳ Real constants

۴ Mapped meshing

شده است [۳۵]. همچنین مشخصات هندسی دیسک دوار ضخامت متغیر پلیمری در جدول ۲، ارائه شده است.

جدول ۱- خواص ویسکو-هایپروالاستیک ماده پلیمری تراکم‌پذیر ETFE بر مبنای مدل نئو-هوکین برای شاخه الاستیک [۳۵]

$\mu_1$ (MPa)	نسبت پواسان ( $\nu$ )	$\tau_1$ (s)	$\beta_1^\infty$	$\rho$ ( $\frac{kg}{m^3}$ )
۴۲/۰۷	۰/۴۴	۹۲۳۰/۵	۰/۲۳۱	۱۷۳۵

$$K = \frac{2}{3} \mu_1 \frac{1+\nu}{(1-2\nu)} = 56/336 \text{ MPa}$$

جدول ۲- مشخصات هندسی دیسک دوار پلیمری [۶]

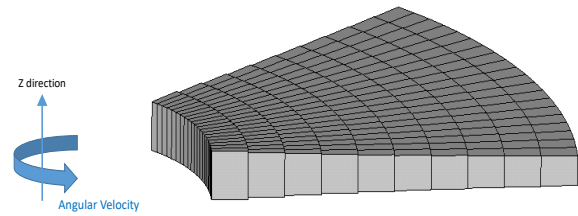
$R_i$ (m)	$R_o$ (m)	$n_h$	$H_0$ (m)	پروفیل دیسک
۰/۲	۰/۶	۰/۵	۰/۰۱	$H(R) = H_0 \left(\frac{R}{R_o}\right)^{-n_h}$

که  $H_0$  و ، به ترتیب ضخامت دیسک در لبه خارجی و توان در پروفیل ضخامت، می‌باشند. همچنین سرعت زاویه‌ای دیسک دوار، برابر با  $\omega = 350 \text{ rad/s}$  در نظر گرفته می‌شود، مگر اینکه خلاف آن صراحتاً ذکر گردد.

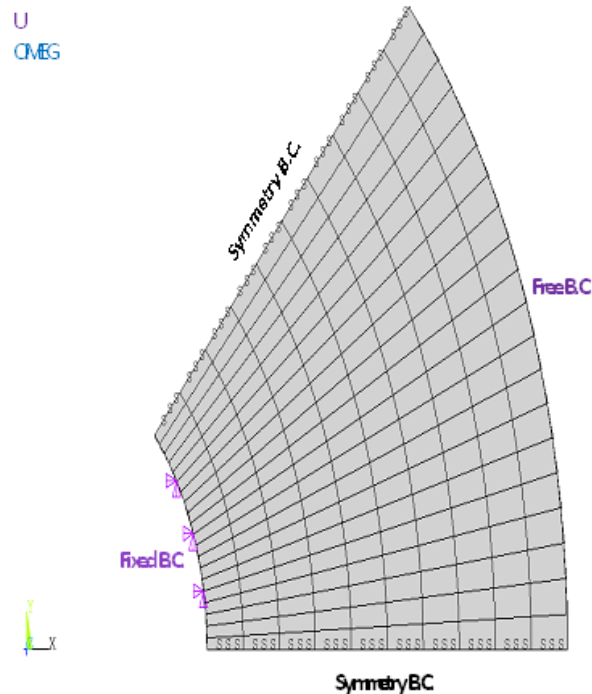
### ۶- ارزیابی حساسیت به مش و اعتبارسنجی مدل ریاضی

با توجه به اینکه همگرایی مولفه‌های تنش که از مشتق‌گیری مولفه‌ی جابجایی شعاعی به دست می‌آید، در تعداد مش بیشتر (با المان‌های ریزتر)، حاصل می‌گردد، در اینجا حساسیت به مش و اعتبارسنجی تحلیل FlexPDE و ANSYS برای تنش ون-میزز در لبه داخلی دیسک دوار، بررسی شده است.

بررسی حساسیت به مش (چگالی مش) برای تنش ون-میزز در لبه داخلی که متحمل بیشترین تنش ون-میزز می‌باشد، در زمان میانی ۸۷۵۰ ثانیه در ANSYS و FlexPDE به ترتیب در شکل ۴ و شکل ۵، نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود با انتخاب تعداد المان‌های بسیار کمتری در FlexPDE نسبت به ANSYS



شکل ۳-۲- اعمال ضخامت متغیر و مش بندی منظم همه زیرسطح‌ها



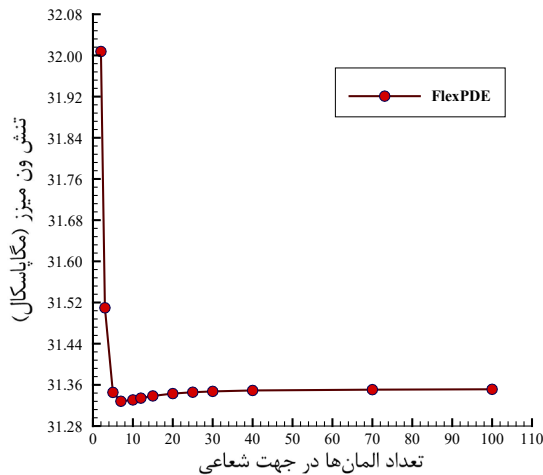
شکل ۳-۳- مش بندی دیسک دوار و اعمال شرایط مرزی و بارگذاری در ANSYS APDL

### ۵- خواص مادی و مشخصات هندسی دیسک دوار

در تحقیق حاضر، پلیمر تراکم‌پذیر اتیلن‌تترافلورواتیلن (ETFE) [۳۵، ۳۶]، به عنوان ماده سازنده دیسک دوار در نظر گرفته شده است. بر اساس نمودار کرنش حقیقی-زمان در آزمایش خزش پلیمر ETFE تحت تنش کششی برابر با ۱۴ MPa، خواص ویسکو-هایپروالاستیک ماده‌ی سازنده دیسک دوار بر مبنای مدل ساختاری نئو-هوکین، مطابق جدول ۱ شامل مدل ماکسول تعمیم‌یافته با یک شاخه الاستیک و یک شاخه ماکسول در نظر گرفته

۱Ethylene Tetrafluoroethylene Copolymer (ETFE)

برابر با ۰/۰۰۲۸ درصد، می‌باشد. همچنین حداکثر اختلاف نتایج تنش ون-میزرز در لبه داخلی به دست آمده از Flex-PDE و ANSYS، برابر با ۰/۷۹ درصد است.

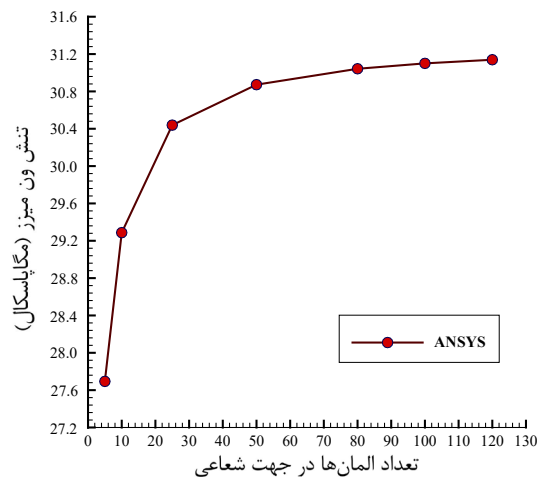


شکل ۵- بررسی حساسیت به مش (چگالی مش) در FlexPDE برای تنش ون-میزرز در لبه داخلی در زمان ۸۷۵۰ ثانیه

لازم به ذکر است که با توجه به اینکه تنش‌ها با مشتق‌گیری از جابجایی حاصل می‌شوند، بدیهی است که نتایج تنش در دو روش دارای درصد اختلاف بیشتری نسبت به نتایج جابجایی باشند. همچنین با دقت در شکل ۶، به وضوح پدیده‌ی خزش، یعنی افزایش تغییرشکل بدون افزایش بار اعمالی در گذر زمان، دیده می‌شود. همان‌طور که گفته شد یکی از دلایل مهم ازدست‌رفتن کارایی قطعات و دیسک‌های دوار در صنعت، پدیده‌ی خزش که با گذر زمان به صورت تدریجی ایجاد می‌شود، می‌باشد. مطابق شکل ۶ و شکل ۷، در زمان میانی  $t=8750s$  دیسک دوار، مرحله گذرا را با نرخ زمانی زیاد طی می‌کند؛ بنابراین، تنش ون-میزرز بر حسب شعاع دیسک دوار برای زمان گذار  $t=8750s$ ، مستخرج از کد FlexPDE و کد AN-SYS APDL در شکل ۸ آورده شده است. با دقت در این شکل دیده می‌شود که تطابق بسیار خوبی بین نتایج FlexPDE و ANSYS وجود دارد.

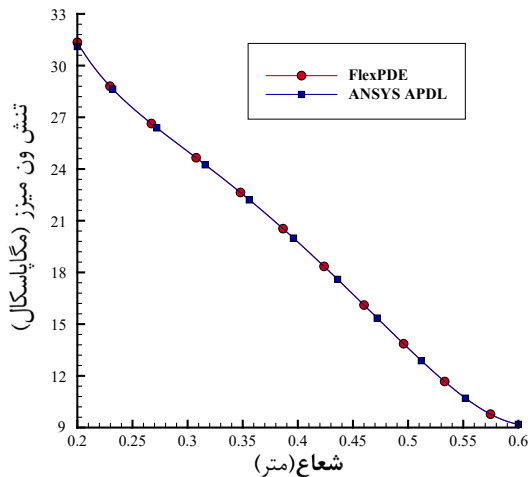
همگرایی مش حاصل می‌شود که این خود می‌تواند یکی از مزیت‌های مهم بکارگیری FlexPDE نسبت به ANSYS باشد. با توجه به شکل ۲ و شکل ۳، مزیت دیگر FlexPDE نسبت به ANSYS این است که در می‌توان با توجه به ذات یک‌بعدی مسئله‌ی تنش-صفحه‌ای و محور-متقارن، دیسک را به صورت یک خط<sup>۱</sup> مدل کرد؛ این درحالیست که در ANSYS باید از مدل دوبعدی استفاده گردد که موجب افزایش بیش از پیش هزینه محاسباتی نسبت به FlexPDE می‌گردد.

لازم به ذکر است که در این تحقیق، با توجه به شکل ۴ و شکل ۵، برای تحلیل ANSYS و FlexPDE به ترتیب از ۱۰۰ المان و ۲۰ المان در جهت شعاعی، استفاده شده است.



شکل ۴- بررسی حساسیت به مش (چگالی مش) در ANSYS برای تنش ون-میزرز در لبه داخلی در زمان ۸۷۵۰ s

مقایسه‌های جابجایی شعاعی در لبه خارجی و تنش ون-میزرز در لبه داخلی بر حسب زمان (ثانیه)، بین FlexPDE و ANSYS، به ترتیب در شکل ۶ و شکل ۷ ارائه شده است. با دقت در نتایج می‌توان دریافت که تطابق بسیار خوبی بین نتایج به دست آمده از روش حاضر و ANSYS وجود دارد. لازم به ذکر است که حداکثر اختلاف نتایج جابجایی شعاعی در FlexPDE و ANSYS در لبه خارجی دیسک

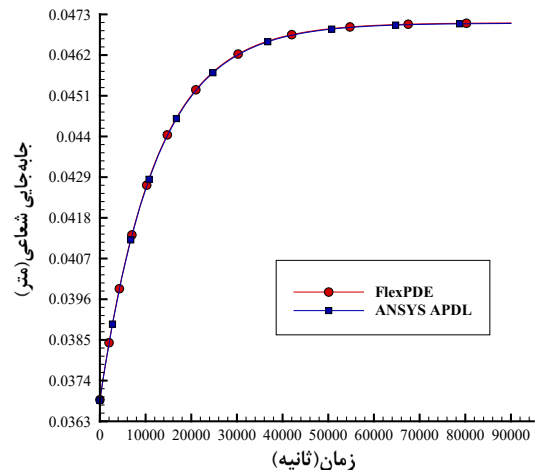


شکل ۸- تنش ون-میزز بر حسب شعاع در زمان گذار  $t=8750s$  پس از تأیید سازگاری نتایج FlexPDE و ANSYS، از این پس نتایج ارائه شده صرفاً از FlexPDE استخراج می گردند.

#### ۷-نتایج و بحث

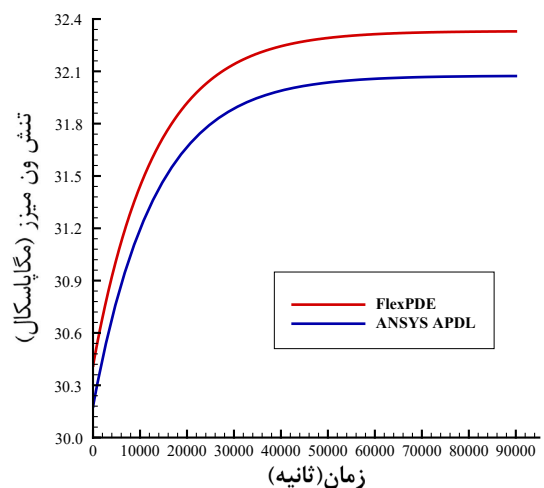
تغییرات نسبت حجمی در شعاعی میانی دیسک دوار بر حسب زمان در شکل ۹ نشان داده شده است. همان طور که مشخص است نسبت حجمی بزرگتر از واحد است که بیانگر افزایش حجم دیسک دوار ناشی از نیروی گریز از مرکز و تورم (انبساط) دیسک می باشد. نکته قابل تأمل این است که نسبت حجمی با گذر زمان، در حال افزایش است؛ دلیل این افزایش آن است که در طی فرایند خزش، سفتی ماده با توجه به مدل رئولوژیکی ماکسول تعمیم یافته در حال کاهش است که منجر به افزایش حجم دیسک می گردد. لازم به ذکر است که اگر نسبت پواسان ماده پلیمری برابر با  $\nu=0/5$  (ماده تراکم ناپذیر) باشد، مقدار کسر حجمی اولیه برابر با  $J=1$  بوده و با گذر زمان تغییر نمی کرد. اما از آنجایی که در تحقیق حاضر، مطابق جدول ۱، نسبت پواسان برابر با  $\nu=0/44$  در نظر گرفته شده است، کسر حجمی اولیه (در  $t=0^+$ ) برابر با واحد نبوده و با گذر زمان ناشی از پدیده خزش، افزایش می یابد.

تنش های شعاعی، محیطی و تنش ون-میزز در شعاع



شکل ۶- مقایسه جابجایی در لبه خارجی دیسک دوار، مستخرج از FlexPDE و ANSYS

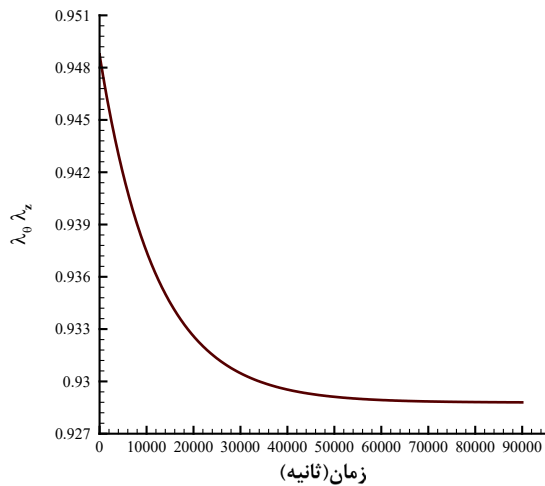
( اختلاف دو روش برابر با  $0/028$  درصد است )



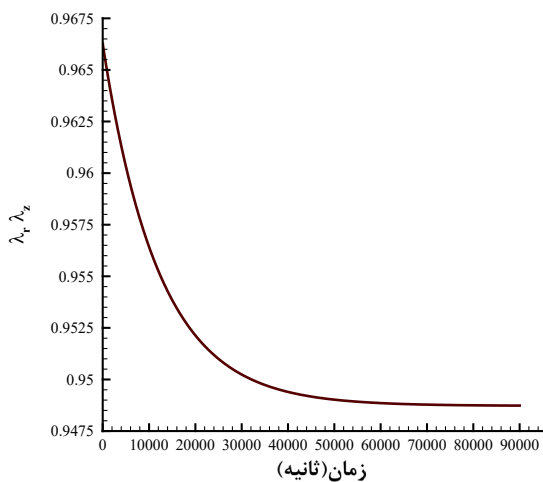
شکل ۷- مقایسه تنش ون-میزز در لبه داخلی دیسک دوار به دست آمده از FlexPDE و ANSYS

( اختلاف دو روش، حداکثر  $0/79$  درصد است )

دقت کنید که اگرچه ابعاد دیسک دوار در راستاهای شعاعی و محیطی با گذر زمان، افزایش می‌یابد، اما کاهش ضخامت دیسک دوار به گونه‌ای است که حاصل ضرب  $\lambda_R \lambda_Z$  و  $\lambda_\theta \lambda_Z$  که به ترتیب بیانگر مساحت سطح عمود بر نیروی محوری و عمود بر نیروی محیطی است، کاهش می‌یابد. برای اطمینان از این کاهش مساحت صفحات مذکور، شکل ۱۱ و شکل ۱۲ که به ترتیب تغییرات  $\lambda_\theta \lambda_Z$  و  $\lambda_R \lambda_Z$  برای شعاع میانی در گذر زمان را نشان می‌دهد، ارائه شده است. همچنین با استدلال مشابه، می‌توان افزایش تنش ون-میزز در لبه داخلی دیسک دوار، ارائه شده شکل ۷ را درک کرد.



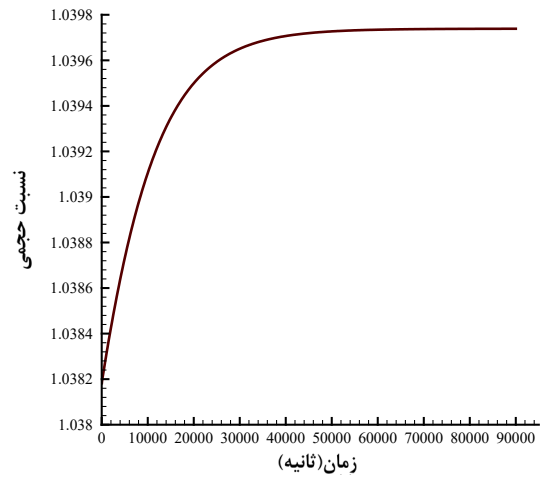
شکل ۱۱- منحنی بر حسب زمان در شعاعی میانی دیسک



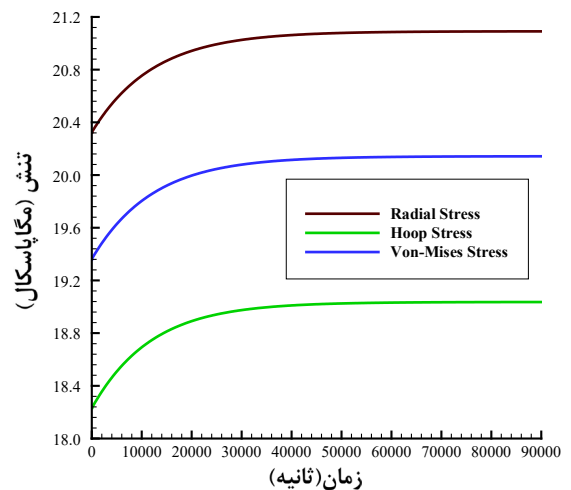
شکل ۱۲- منحنی  $\lambda_R \lambda_Z$  بر حسب زمان در شعاعی میانی دیسک

میانی دیسک بر حسب زمان، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود با گذر زمان، تنش‌های شعاعی، محیطی و ون-میزز در شعاع میانی دیسک دوار، افزایش می‌یابد.

این نتیجه را می‌توان این‌چنین توجیه کرد که با گذر زمان، صفحات عمود بر نیروی شعاعی و عمود بر نیروی محیطی بر اثر پدیده خزش، کوچک‌تر می‌گردد که منجر به افزایش تنش شعاعی، محیطی و ون-میزز در شعاع میانی می‌گردد.

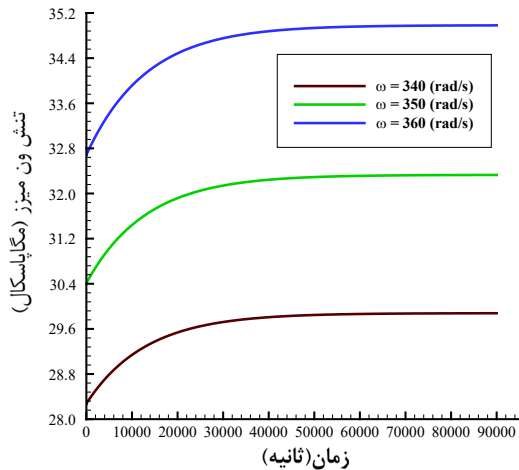


شکل ۹- نسبت حجمی  $V/V_0$  در شعاعی میانی دیسک دوار بر حسب زمان



شکل ۱۰- تنش‌های شعاعی، محیطی و ون-میزز در شعاع میانی دیسک دوار بر حسب زمان





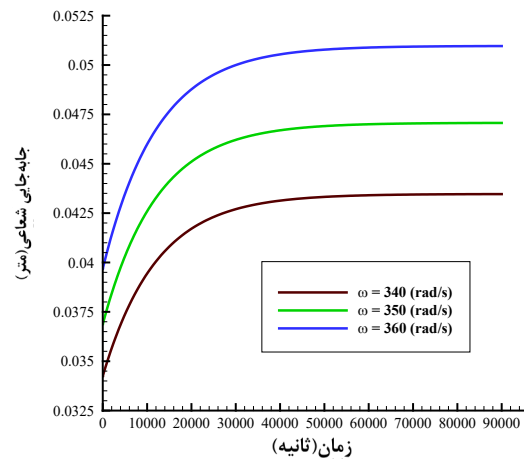
شکل ۱۴- تنش ون-میزز در لبه داخلی بر حسب زمان برای سرعت‌های زاویه‌ای ۳۴۰، ۳۵۰ و ۳۶۰ رادیان بر ثانیه

همچنین تأثیر توان در پروفیل ضخامت  $n_h$  (ارائه شده در جدول ۲) بر جابجایی شعاعی در لبه خارجی در شکل ۱۵ و همچنین بر تنش ون-میزز در لبه داخلی در شکل ۱۶، برای  $n_h = 0/4$  و  $n_h = 0/5$ ،  $n_h = 0/6$  نشان داده شده است. افزایش  $n_h$  به معنای افزایش ضخامت شعاع داخلی نسبت به شعاع خارجی است و از آن جایی که تأثیری بر مقدار ضخامت در شعاع خارجی ندارد، لذا افزایش  $n_h$  به‌طور کلی منجر به افزایش ضخامت دیسک دوار می‌گردد؛ بنابراین افزایش توان در پروفیل ضخامت  $n_h$ ، به‌عنوان یک پارامتر هندسی در دیسک دوار، منجر به کاهش جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز می‌شود. همچنین مشاهده می‌شود که تغییرات  $n_h$ ، تأثیری بر زمان آرامش (رسیدن به حالت پایدار)، در دیسک دوار ندارد.

همان‌طور که گفته شد باتوجه به شکل ۱۳ الی شکل ۱۶ که نشان دهنده این واقعیت است که تغییر بار اعمالی و تغییر هندسه‌ی دیسک تأثیری برای زمان آرامش (زمان رسیدن به حالت پایدار) ندارد، می‌توان نتیجه گرفت که زمان آرامش دیسک دوار ویسکو-هایپرالاستیک، متأثر از بارگذاری و هندسه دیسک نمی‌باشد. به بیان دیگر، زمان

تأثیر تغییرات سرعت زاویه‌ای بر جابجایی شعاعی در لبه خارجی در شکل ۱۳ و بر تنش ون-میزز در لبه داخلی برای سرعت‌های زاویه‌ای ۳۴۰ rad/s، ۳۵۰ rad/s و ۳۶۰ rad/s در شکل ۱۴ نشان داده شده است. بدیهی است که با افزایش سرعت زاویه‌ای — به‌عنوان بار اعمالی — جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز در دیسک دوار افزایش می‌یابد. همچنین با دقت در شکل ۱۳ و شکل ۱۴، نکته قابل تأمل این است که تغییرات سرعت زاویه‌ای، تأثیر چندانی بر زمان آرامش (رسیدن به حالت پایدار) در دیسک دوار ندارد.

لازم به ذکر است که سرعت‌های زاویه‌ای ارائه‌شده در شکل ۱۳ و شکل ۱۴ به‌گونه‌ای نزدیک به یکدیگر انتخاب شده‌اند تا مقادیر جابجایی شعاعی و تنش ون-میزز از لحاظ مرتبه‌ی بزرگی در محدوده‌ی یکسانی باشند تا بتوان آنها را در یک شکل واحد، مقایسه کرد.



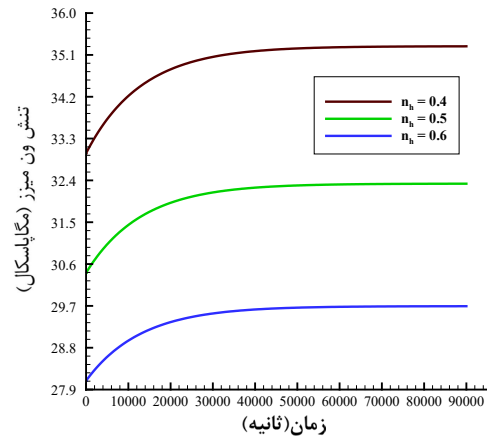
شکل ۱۳- جابجایی شعاعی در لبه خارجی بر حسب زمان برای سرعت‌های زاویه‌ای ۳۴۰، ۳۵۰ و ۳۶۰ رادیان بر ثانیه

آرامش، مشخصه ماده ویسکو-هایپرالاستیک است و مستقل از مقدار بارگذاری و هندسه دیسک دوار است.

کمتتر در راستای شعاعی نسبت به ANSYS و همچنین مدل‌سازی یک‌بعدی در FlexPDE به‌جای مدل‌سازی دوبعدی در ANSYS، می‌توان به نتایج کاملاً سازگار با نتایج ANSYS دست یافت. بنابراین یکی از مزیت‌های مهم FlexPDE، عدم نیاز به مش‌بندی ریز و دوبعدی و در نتیجه کاهش هزینه محاسباتی می‌باشد. همچنین نشان داده شد که مزیت دیگر FlexPDE نسبت به ANSYS این است که در ANSYS المان تنش‌صفحه‌ای با ضخامت ثابت (غیرمتغیر) تعریف شده است. بنابراین برای مدل‌سازی دیسک دوار ضخامت متغیر، ناگزیر به کدنویسی در APDL هستیم. اما در FlexPDE به‌دلیل آنکه المان از پیش تعریف‌شده با محدودیت‌های مشخص وجود ندارد، به کدنویسی اضافی برای تعریف تغییرات ضخامت در راستای شعاعی نیاز نیست.

نشان داده شد با گذر زمان، جابجایی شعاعی دیسک دوار ناشی از پدیده خزش، افزایش می‌یابد و با مطالعه مؤلفه‌های تنش ون-میزز در شعاع‌های داخلی و میانی، مشاهده شد که تنش ون-میزز با گذر زمان افزایش می‌یابد که دلیل آن کاهش سطح عمود بر نیروهای اعمال‌شده بر ذرات مادی دیسک، می‌باشد. همچنین اثر تغییرات سرعت زاویه‌ای و پارامتر هندسی پروفیل ضخامت، بر مقدار جابجایی و تنش ون-میزز در یک زمان ثابت و در گذر زمان، مورد توجه قرار گرفت. مشخص شد که با افزایش سرعت زاویه‌ای و کاهش پارامتر هندسی، مقدار جابجایی و تنش ون-میزز، افزایش می‌یابد. همچنین نشان داده شد که تغییر در سرعت زاویه‌ای (به‌عنوان بار اعمالی) و تغییر در پارامتر (به‌عنوان یک مشخصه هندسی)، تأثیر چندانی در زمان آرامش دیسک دوار، یعنی رسیدن به حالت پایدار، ندارد و در واقع آنچه در تعیین زمان آرامش دیسک دوار مهم است، خواص ماده سازنده دیسک دوار ویسکو-هایپرالاستیک می‌باشد.

آرامش، مشخصه ماده ویسکو-هایپرالاستیک است و مستقل از مقدار بارگذاری و هندسه دیسک دوار است.



شکل ۱۶- تنش ون-میزز در لبه داخلی بر حسب زمان برای  $n_h = 0/4$ ،  $n_h = 0/6$  و  $n_h = 0/5$

## ۸- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، تحلیل ویسکو-هایپرالاستیک دیسک دوار ضخامت متغیر با استفاده از حل معادلات دیفرانسیل جزئی و جبری حاکم بر مسئله در محیط برنامه‌نویسی FlexPDE، انجام شده است. لازم به ذکر است که فرمول‌بندی به‌کاررفته برای حل دیسک دوار در تحقیق حاضر، قادر به تحلیل دیسک‌های دوار تراکم‌ناپذیر ( $\nu \neq 0.5$ ) نیز می‌باشد. اما مورد مطالعاتی به‌کاررفته در اینجا، برای حفظ جامعیت تحقیق، یک ماده با نسبت پواسان  $\nu = 0.44$  در نظر گرفته شده است. زیرا بیشتر پلیمرها عمدتاً دارای نسبت پواسان دقیقاً برابر با  $\nu = 0.5$  نیستند؛ اما در بسیاری موارد، به منظور ساده‌سازی تحلیل، آن‌ها را کاملاً تراکم‌ناپذیر ( $\nu = 0.5$ ) فرض می‌کنند.

با استفاده از مدل‌سازی دیسک دوار ضخامت متغیر در ANSYS APDL، اعتبارسنجی برای فرمول‌بندی و روش عددی به‌کاررفته (کدنویسی در FlexPDE)، مورد بررسی قرار گرفته است. با مقایسه حساسیت به مش در FlexP- و DE و ANSYS، مشاهده شد که در FlexPDE با المان‌های

## ۹-مراجع

- [14] F. Mainardi and G. Spada, "Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology," *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 193, no. 1, pp. 133-160, 2011.
- [15] F. Wu, J. F. Liu, and J. Wang, "An improved Maxwell creep model for rock based on variable-order fractional derivatives," *Environmental Earth Sciences*, vol. 73, no. 11, pp. 6965-6971, 2015.
- [16] R. Zanganeh, A. Keramat and A. Ahmadi, "Investigation of the effects of viscoelastic support properties simulated by the generalized Kelvin-Voigt model on the axial vibration of a rod", *Journal of Modeling in Engineering*, vol. 13, no. 41, pp. 93-111, 2015 (In Persian)
- [17] W. W. Feng, "On finite deformation of viscoelastic rotating disks," *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 20, no. 1, pp. 21-26, 1985.
- [18] M. Allam, A. Zenkour, and T. El-Azab, "Viscoelastic deformation of the rotating inhomogeneous variable thickness solid and annular disks," *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, vol. 8, no. 5, pp. 313-322, 2007.
- [19] S. Ganguly, A. Nandi, and S. Neogy, "A state space viscoelastic shaft finite element for analysis of rotors," *Procedia Eng.*, vol. 144, pp. 374-381, 2016.
- [20] F. S. Buezas and N. S. Fochesatto, "Power dissipation of a viscoelastic rolling wheel in finite deformations," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 138, pp. 502-514, 2018.
- [21] J. Tavakoli and J. Cošti, "New findings confirm the viscoelastic behaviour of the inter-lamellar matrix of the disc annulus fibrosus in radial and circumferential directions of loading," *Acta biomaterialia*, vol. 71, pp. 411-419, 2018.
- [22] H. Zharfi and H. E. Toussi, "Non-Steady Creep Analysis of FGM Rotating Disc Using GDQ Method," *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 11, no. 1, pp. 1-15, 2019.
- [23] G. S. Kohli, T. Singh, and H. Singh, "Creep analysis in thick composite cylinder considering large strain," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 42, no. 1, pp. 1-8, 2020.
- [24] K. Khanna, V. K. Gupta, and N. Grover, "Influence of anisotropy on creep in functionally graded variable thickness rotating disc," *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 57, no. 2, pp. 95-103, 2022.
- [25] M. Kazemian, A. Moazemi Goudarzi, and A. Hassani, "A study on an incompressible polymeric pressurized vessel subjected to bulk degradation," *Mathematics and Mechanics of Solids*, p. 10812865211033634, 2021.
- [26] M. Kazemian, A. Hassani, and A. Moazemi Goudarzi, "Mechanical Integrity Reduction in the Polymeric-pulsatile-pressurized Vessel under Strain-induced Degradation Model," *Journal of Stress Analysis*, vol. 6, no. 1, pp. 67-77, 2021.
- [27] M. Kazemian, A. Moazemi Goudarzi, and A. Hassani, "A study on deformation-induced degradation of the com-
- [1] M. Hojjati and A. Hassani, "Theoretical and numerical analyses of rotating discs of non-uniform thickness and density," *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 85, no. 10, pp. 694-700, 2008.
- [2] A. Hassani and M. Gholami, "Analytical and numerical bending solutions for thermoelastic functionally graded rotating disks with nonuniform thickness based on Mindlin's theory," *Journal of Stress Analysis*, vol. 2, no. 1, pp. 35-49, 2017.
- [3] B. Shahriari and M. Kashkouli, "Simulation of heat transfer and temperature distribution in jet engine rotating disks", *Tabriz Mechanical Engineering*, vol. 47, no. 2, pp. 123-137, 2017 (In Persian)
- [4] M. Allam, R. Tantawy, A. Yousof, and A. M. Zenkour, "Elastic and viscoelastic stresses of nonlinear rotating functionally graded solid and annular disks with gradually varying thickness," *Arch. Mech. Eng.*, vol. 64, no. 4, 2017.
- [5] H. Zharfi and H. Ekhteraei Toussi, "Creep analysis of FGM rotating disc with non-uniform profiles", *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 1, no. 2, pp. 29-36, 2015 (In Persian)
- [6] A. Hassani, M. Hojjati, G. Farrahi, and R. Alashti, "Semi-exact elastic solutions for thermo-mechanical analysis of functionally graded rotating disks," *Composite Structures*, vol. 93, no. 12, pp. 3239-3251, 2011.
- [7] S. Akbarov and S. Karakaya, "3D Analyses of the symmetric local stability loss of the circular hollow cylinder made from viscoelastic composite material," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 9, pp. 4241-4260, 2012.
- [8] K. Torabi and H. Afshari, "Thermo-mechanical stress analysis in a rotating radially graded FG-disc with non-uniform thickness", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, vol. 50, no. 1, pp. 33-46, 2018 (In Persian)
- [9] H. Chaudhry and U. Gupta, "Rotation of hyperelastic annular and solid disks of variable thickness," *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 27, no. 3, pp. 341-346, 1992.
- [10] A. N. Eraslan and Y. Orcan, "Elastic-plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness," *Mechanics of Materials*, vol. 34, no. 7, pp. 423-432, 2002.
- [11] S. H. Kordkheili and R. Naghdabadi, "Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk," *Composite Structures*, vol. 79, no. 4, pp. 508-516, 2007.
- [12] A. Hassani, M. Hojjati, G. Farrahi, and R. Alashti, "Semi-exact solution for thermo-mechanical analysis of functionally graded elastic-strain hardening rotating disks," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 17, no. 9, pp. 3747-3762, 2012.
- [13] M. Salmani Tehrani and M.R. Hemati, "Analytical investigating of the pattern of yielding initiation for a rotating hollow FGM cylinder", *Journal of Modeling in Engineering*, vol. 13, no. 43, pp. 25-38, 2016 (In Persian)

pressible polymeric pressurized vessel through a non-equilibrium thermodynamic framework,” *Mathematics and Mechanics of Solids*, p. 10812865211042924, 2021.

[28] M. Gholami, A. Hassani, H. Afrasiab, M. Kazemiyan, “Theoretical and numerical investigation of environmental effects on mechanical behavior of biodegradable polymers”, *Modares Mechanical Engineering*, vol. 19, no. 12, pp. 2837-2846, 2019 (In Persian)

[29] Ansys® Academic Research Mechanical APDL, Help System, Theory Reference. (2020).

[30] M. Kazemian, A. Hassani, and A. M. Goudarzi, “On strain-induced degradation of the polymeric skeleton in poro-hyperelastic inflating vessels by a non-equilibrium thermodynamic framework,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 171, p. 103618, 2022.

[31] A. G. Holzapfel, *Nonlinear solid mechanics, A Continuum Approach for Engineering*. JOHN WILEY & SONS, 2000.

[32] G. A. Holzapfel, “On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, no. 22, pp. 3903-3926, 1996.

[33] G. A. Holzapfel and J. C. Simo, “A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermo-mechanical changes,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 33, no. 20-22, pp. 3019-3034, 1996.

[34] FlexPDE 7.20, PDE Solution Inc. (2021).

[35] B. Zhao, J. Hu, W. Chen, J. Chen, and Z. Jing, “Uniaxial tensile creep properties of ETFE foils at a wide range of loading stresses subjected to long-term loading,” *Construction and Building Materials*, vol. 253, p. 119112, 2020.

[36] J. Hu, W. Chen, R. Luo, B. Zhao, and R. Sun, “Uniaxial cyclic tensile mechanical properties of ethylene tetrafluoroethylene (ETFE) foils,” *Construction and Building Materials*, vol. 63, pp. 311-319, 2014.