



Analysis of Mindlin Plates by Dynamic Relaxation Method

Hossein Estiri^{*1} , Mahdi Adineh²

1. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University of Gonabad, Gonabad, Iran

2. Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, University of Gonabad, Gonabad, Iran

Abstract

The Mindlin plate theory, which accounts for shear deformation effects, is employed to ensure accurate modeling of moderately thick plates. This paper investigates the efficiency of various dynamic relaxation methods for the elastic analysis of Mindlin plates. The main objective is to evaluate the advantages of twelve different relaxation schemes. The distinctions among these approaches lie in the determination of artificial parameters such as damping and mass, which are essential for the convergence of dynamic relaxation. The study focuses on assessing these methods based on numerical stability, convergence rate, and computational efficiency. Several Mindlin plate examples with diverse geometries and boundary conditions are solved to compare the performance of different dynamic relaxation techniques. Given the variety of the analyzed cases, the obtained results can serve as benchmark problems for Mindlin plate analysis. Key criteria, including the number of iterations required for convergence and the total computational time, are recorded for each method. The results reveal significant variations in efficiency among the twelve algorithms, with some exhibiting rapid convergence while others require considerably more iterations. A comprehensive ranking based on these computational metrics is established to identify the most efficient and robust techniques for practical applications. Furthermore, the study demonstrates the sensitivity of dynamic relaxation convergence to the selection of artificial parameters. Numerical results indicate that the Underwood method is efficient in terms of analysis time, while the minimum residual energy scheme achieves the fewest iterations for Mindlin plate analysis.

Keywords

Dynamic Relaxation

Mindlin Plate

Mass, Damping

Time Step

Received: 29.06.2025

Revised: 13.09.2025

Accepted: 21.10.2025

*Corresponding Author

Hossein Estiri

Email

h.estiri@gonabad.ac.ir

1- Introduction

The DR method is an explicit iterative technique used to solve static equilibrium problems by converting them into fictitious dynamic systems. The general iterative equations for velocity and displacement are given by:

$$\dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2m_{ii}^n - C_{ii}^n t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} (p_i^n - f_i^n) \quad (1)$$

$$X_i^{n+1} = X_i^n + t^{n+1} \dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, ndof$$

where m and c are the diagonal mass and damping matrices, Δt is the time step, p is the external load vector, and f is the internal force vector. The system evolves in time until the residual force tends to zero, indicating convergence to the static equilibrium solution.

How to Cite this Article:

[1] H. Estiri and M. Adineh, "Analysis of Mindlin plates by dynamic relaxation method," *Journal of Science and Technology in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 153–174, 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.22034/stme.2025.531701.1137> (in Persian)



2- Research Methods

This study presents a comprehensive comparative analysis of twelve well-known dynamic relaxation (DR) methods for the elastic analysis of Mindlin plates. The Mindlin plate theory, which incorporates transverse shear deformation effects, is employed to accurately model moderately thick plates. The primary objective is to evaluate the computational efficiency, convergence rate, and numerical stability of these DR techniques, which differ mainly in their approaches to determining fictitious parameters such as mass, damping, and time step. The twelve DR methods compared in this study are: Papadrakakis [1], Underwood [2], Qiang [3], Zhang [4], Nodal Damping [5], Rezaiee-Pajand and Taghavian Hakkak (RPTH) [6], Kinetic Damping (kdDR) [7], Minimum Residual Force (MFT) [8], Rezaiee-Pajand and Alamatian (mdDR) [9] Minimum Residual Energy (MRE) [8], Rezaiee-Pajand and Sarafrazi (RPS) [10], Zero Damping (zdDR) [11].

A variety of plate geometries and boundary conditions were analyzed, including square, rectangular, circular, triangular, L-shaped, and irregular plates, under uniform distributed loads as well as plates with hole. The performance of each method was assessed based on the number of iterations and computational time required to achieve convergence, with a residual force tolerance of 10^{-6} .

The scoring and ranking system assigned a rank from 1 (best) to 12 (worst) for each method in each example. The total score S_i for method i was calculated as:

$$S_{ij} = 100 \times \sum_{j=1}^{12} Q_{ij} \times (13 - j) / 240 \quad (3)$$

Here, the j^{th} grade of the i^{th} technique is denoted by Q_{ij} . For example, the kdDR algorithm is ranked first in one numerical example, based on the number of iterations. Hence, Q_{i1} is 1 for this strategy. Furthermore, Underwood's technique is ranked third for the eleven times, according to the analysis duration. Therefore, Q_{i3} is equal to 11. Number of

structures which cannot be analyzed by using i^{th} procedure is Q_{i0} . For example, the RPTH is not able to achieve the acceptable error in ten examples. As a result, Q_{i0} is equal to 10. Note that, methods which converge to the true answers are inserted into Eq. (3). It should be noted that if an approach is ranked first in all the 20 examples, its score is 240. Consequently, score S_i of this scheme is 100.

3- Results

The numerical results reveal significant variations among the methods. The Underwood and MRE techniques demonstrate superior convergence and efficiency across most examples, while the Papadrakakis and Kinetic Damping methods show slower performance. For instance, the MRE algorithm yields the minimum number of iterations for square and circular plates, whereas Underwood's method exhibits the shortest analysis time. The comparative ranking of the DR methods based on averaged performance across all cases is summarized below:

Table 1: Performance level of methods

Rank	Method	Performance Level
1	MRE (Minimum Residual Energy)	Excellent convergence, very efficient
2	Underwood	Fastest analysis time
3	MFT (Minimum Force Technique)	High convergence rate
4	mdDR (Rezaeepazhand & Alamatian)	Consistent accuracy
5	RPS (Rezaeepazhand & Sarafarazi)	Robust for complex geometries
6	Qiang	Moderate performance
7	Zhang	Good stability
8	zdDR (Zero Damping)	Acceptable for small models
9	RPTH	Limited convergence range
10	Nodal Damping	Stable but slow
11	Kinetic Damping (kdDR)	Poor convergence
12	Papadrakakis	Lowest efficiency

4- Conclusion

Overall, the comparative study demonstrates that the choice of artificial parameters—especially damping and mass—strongly affects the

convergence and computational efficiency of dynamic relaxation methods for Mindlin plate analysis. Among all tested algorithms, the Minimum Residual Energy (MRE) method achieved the highest ranking based on the number of iterations, with the lowest iteration count in 15 out of 20 examples. The Underwood method was the fastest in terms of computational time. The Papadrakakis method consistently required the highest number of iterations and computational time. Methods such as Qiang, RPS, and mdDR exhibited similar behavior in terms of iteration counts across most examples. The study concludes that the MRE and Underwood methods are the most efficient for analyzing Mindlin plates using the dynamic relaxation approach, offering the best balance between convergence speed and computational cost.

5- References

- [1] M. Papadrakakis, "A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25, No. 1, pp. 35–48, 1981, doi: [10.1016/0045-7825\(81\)90066-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90066-9).
- [2] P. Underwood, "Dynamic relaxation (in structural transient analysis)," in *Computational Methods for Transient Analysis*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1983, pp. 245–265.
- [3] S. Qiang, "An adaptive dynamic relaxation method for nonlinear problems," *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 4, pp. 855–859, 1988, doi: [10.1016/0045-7949\(88\)90117-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90117-4).
- [4] L. G. Zhang and T. X. Yu, "Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic–plastic bending and wrinkling of circular plates," *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 2, pp. 609–614, 1989, doi: [10.1016/0045-7949\(89\)90035-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90035-7).
- [5] L. C. Zhang, M. Kadkhodayan, and Y. W. Mai, "Development of the maDR method," *Computers & Structures*, Vol. 52, No. 1, pp. 1–8, 1994, doi: [10.1016/0045-7949\(94\)90249-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90249-6).
- [6] M. Rezaiee-Pajand and M. Taghavian Hakkak, "Nonlinear analysis of truss structures using dynamic relaxation," *International Journal of Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 11–22, 2006.
- [7] B. H. V. Topping and P. Ivanyi, *Computer Aided Design of Cable Membrane Structures*. Scotland: Saxe-Coburg Publications, 2008, ch. Dynamic Relaxation, pp. 39–84.
- [8] M. Rezaiee-Pajand, M. Kadkhodayan, and J. Alamatian, "Timestep selection for dynamic relaxation method," *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40, No. 1, pp. 42–72, 2012, doi: [10.1080/15397734.2011.599311](https://doi.org/10.1080/15397734.2011.599311).
- [9] M. Rezaiee-Pajand and J. Alamatian, "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, No. 1, pp. 109–133, 2010, doi: [10.12989/sem.2010.34.1.109](https://doi.org/10.12989/sem.2010.34.1.109).
- [10] M. Rezaiee-Pajand and S. R. Sarafrazi, "Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method with improved convergence rate," *International Journal of Computational Methods*, Vol. 7, No. 4, pp. 627–654, 2010, doi: [10.1142/S0219876210002386](https://doi.org/10.1142/S0219876210002386).
- [11] M. Rezaiee-Pajand and S. R. Sarafrazi, "Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping," *Computers & Structures*, Vol. 89, nos. 13–14, pp. 1274–1285, 2011, doi: [10.1016/j.compstruc.2011.04.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.04.005).



حل صفحات میندلین به روش رهایی پویا

حسین استیری^{۱*}، مهدی آدینه^۲

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد، ایران
۲- استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، مجتمع آموزش عالی گناباد، گناباد، ایران

کلمات کلیدی

رهایی پویا
صفحه‌ی میندلین
جرم
میرایی
گام زمانی

دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۴/۰۸

بازنگری مقاله: ۱۴۰۴/۰۶/۲۲

پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۷/۲۹

*نویسنده مسئول

حسین استیری

ایمیل

h.estiri@gonabad.ac.ir

چکیده

نظریه صفحه‌ی میندلین، که شامل اثرات تغییر شکل برشی است، برای اطمینان از مدل‌سازی دقیق صفحات نسبتاً ضخیم به کار می‌رود. این مقاله به بررسی کارایی روش‌های مختلف رهایی پویا برای تحلیل الاستیک صفحات میندلین می‌پردازد. هدف اصلی، ارزیابی مزایای دوازده شیوه‌ی رهایی است. تفاوت این راه‌کارها در چگونگی تعیین پارامترهای ساختگی مانند میرایی و جرم می‌باشد که برای همگرایی رهایی پویا لازم هستند. این مطالعه بر ارزیابی این روش‌ها بر اساس پایداری عددی، سرعت همگرایی و کارایی محاسباتی تمرکز دارد. چندین نمونه از صفحات میندلین با هندسه‌ها و شرایط مرزی متنوع برای مقایسه‌ی عملکرد راه‌کارهای گوناگون رهایی پویا حل می‌شوند. با توجه به تنوع نمونه‌های حل شده، می‌توان از نتایج آن به عنوان مسائل بنچمارک در حل صفحه‌های میندلینی بهره جست. معیارهای کلیدی، از جمله تعداد تکرارهای مورد نیاز برای همگرایی و کل زمان محاسباتی، برای هر روش ثبت شده‌اند. نتایج، تغییرات قابل توجهی در کارایی بین دوازده الگوریتم را نشان می‌دهد. به طوری که برخی دارای همگرایی سریعی هستند؛ در حالی که برخی دیگر به تکرارهای قابل توجهی بیشتری نیاز دارند. یک رتبه‌بندی جامع بر اساس این معیارهای محاسباتی ایجاد شده است که کارآمدترین و قوی‌ترین تکنیک‌ها را برای کاربردهای عملی شناسایی می‌کند. همچنین، این مطالعه حساسیت همگرایی رهایی پویا به انتخاب پارامترهای ساختگی را نشان می‌دهد. نتایج عددی، نمایانگر کارایی مناسب روش آندوود در زمان تحلیل و شیوه‌ی کمینه انرژی پسماند در شمار تکرارها برای تحلیل صفحات میندلینی است.

۱- مقدمه

شبکه [۴] نام برد. با این حال، برای مسائل غیرخطی و مقیاس بزرگ، روش‌های حل تکراری مانند شیوه‌ی رهایی پویا به دلیل کارایی محاسباتی و پایداری، مورد توجه قرار گرفته‌اند [۵ و ۶]. روش رهایی پویا، فن صریح حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان است. در این فرایند، از رابطه‌های برداری ساده برای رسیدن به پاسخ بهره‌جویی می‌شود. به همین سبب، رابطه‌های تکراری راه‌کار رهایی پویا صریح می‌باشند. به سخن دیگر، نیاز به وارون ماتریس نیست. از دیدگاه فیزیکی، راه‌حل رهایی پویا برای دستیابی به پاسخ سازه‌ی ایستا، از پاسخ حالت پایدار همان سامانه در حالت پویا بهره می‌جوید. یادآوری می‌کند، روش

تحلیل سازه‌های صفحه‌ای از مباحث اساسی در مکانیک سازه‌ها محسوب می‌شود که کاربردهای گسترده‌ای در مهندسی عمران، هوافضا و سایر زمینه‌ها دارد. در میان نظریه‌های مختلف صفحات، تئوری صفحه‌ی میندلین به‌طور گسترده برای مدل‌سازی صفحات با ضخامت متوسط استفاده می‌گردد. این نظریه، اثرات تغییر شکل برشی عرضی را در نظر می‌گیرد که در تئوری کلاسیک صفحه‌ی کیرشلف نادیده گرفته می‌شود. طی سال‌ها، روش‌های عددی متعددی برای حل مسائل صفحه‌ی میندلین توسعه‌یافته‌اند. از جمله‌ی این شیوه‌ها می‌توان از روش المان محدود [۱ و ۲]، راه‌کار المان مرزی [۳] و راه‌حل‌های بدون

How to Cite this Article:

[1] H. Estiri and M. Adineh, "Analysis of Mindlin plates by dynamic relaxation method," *Journal of Science and Technology in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 153-174, 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.22034/stme.2025.531701.1137> (in Persian)



©2026 the authors. Published by Technical and Vocational University (TVU), Tehran, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC License) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>)

شاپای الکترونیکی: ۲۲۳۲-۲۹۸۱

باوجود این پیشرفت‌ها، هنوز اتفاق نظری در مورد کارآمدترین الگوریتم‌های پویا برای مسائل خمش صفحات، هنگامی که تغییر شکل‌های برشی در نظر گرفته می‌شوند، وجود ندارد.

این مقاله ارزیابی جامعی از دوازده شیوه‌ی شناخته شده‌ی رهایی پویا را برای تحلیل الاستیک صفحات میندلین انجام می‌دهد. عملکرد این راه‌حل‌ها از نظر نرخ همگرایی، هزینه‌ی محاسباتی و شرایط مرزی مختلف صفحات بررسی می‌شود. راه‌کارها بر پایه‌ی تحلیل‌های عددی رتبه‌بندی می‌گردند. یافته‌های این تحقیق به توسعه مکانیک محاسباتی کمک کرده و بینش‌هایی را برای بهینه‌سازی حل‌گرهای تکراری رهایی پویا در سازه‌های صفحه‌ای فراهم می‌کند.

۲- روش رهایی پویا

در فرآیند رهایی پویا، با افزودن ماتریس‌های جرم و میرایی ساختگی به معادلات تعادل استاتیکی سازه، یک سیستم دینامیکی فرضی ایجاد می‌شود. روابط تکراری این روش با بهره‌جستن از شیوه‌ی تفاضل‌های محدود مرکزی به دست می‌آیند. برابری‌های (۱) و (۲)، به ترتیب، سرعت \dot{X} و جابجایی X را در راه‌کار رهایی پویا نشان می‌دهند. این دو رابطه، اساس فن رهایی پویا هستند.

$$\begin{aligned} \dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}} = & \frac{2m_{ii}^n - C_{ii}^n t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{2t^n}{2m_{ii}^n + C_{ii}^n t^n} (p_i^n - f_i^n) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} X_i^{n+1} = & X_i^n \\ & + t^{n+1} \dot{X}_i^{n+\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, ndof \end{aligned} \quad (2)$$

ماتریس‌های جرم و میرایی در این شیوه، قطری پنداشته می‌شوند. ماتریس‌های جرم و میرایی، به ترتیب، با m و C ، گام زمانی با t و بردار نیروی داخلی با f نمایش داده می‌شوند. نیروی خارجی اعمالی با p نشان داده شده است. عامل‌های n و i ، به ترتیب، شمارنده‌ی تکرار رهایی پویا و شماره‌ی درجه‌ی آزادی سازه می‌باشند. همچنین، $ndof$ تعداد درجات آزادی کل سیستم را مشخص می‌کند. شیوه‌های گوناگونی برای محاسبه‌ی ماتریس‌های جرم و میرایی و همچنین، گام زمانی وجود دارد. در ادامه، دوازده روش برای محاسبه‌ی این عامل‌ها معرفی می‌شوند.

رهایی پویا بر پایه‌ی تغییرشکل‌های ماندگار ناشی از نیروی ثابت یک دستگاه پویای میرا، استوار است.

روش رهایی پویا که در اصل برای حل مسائل تعادل استاتیکی از طریق حل دستگاه ساختگی دینامیکی توسعه یافته است، به پارامترهای مجازی مانند جرم و ماتریس میرایی وابسته می‌باشد تا پایداری عددی و همگرایی را تضمین کند [۷] و [۸]. انتخاب این پارامترها تأثیر قابل توجهی بر عملکرد روش دارد و منجر به توسعه تکنیک‌های شتاب‌دهی مختلف شده است [۹]. مطالعات متعددی به کاربرد روش رهایی پویا در مکانیک سازه‌ها، از جمله تحلیل غشاها [۱۰]، پوسته‌ها [۱۱] و صفحات [۱۲] پرداخته‌اند. با این حال، مقایسه‌ی الگوریتم‌های مختلف رهایی پویا برای صفحات میندلین هنوز محدود است.

تحقیقات پیشین، روابط متعددی از شیوه‌ی رهایی پویا را ارائه کرده‌اند. روش‌های صریح و ضمنی [۱۳]، راه‌کارهای میرایی تطبیقی [۱۴] و میرایی جنبشی [۱۵] از جمله‌ی این‌ها می‌باشد. برخی مطالعات بر جرم‌های ساختگی بهینه تمرکز کرده‌اند [۷]. در حالی که برخی دیگر، معیارهای همگرایی مبتنی بر انرژی را معرفی کرده‌اند [۱۶]. روش رهایی پویا در دهه‌ی اخیر پیشرفت‌های چشمگیری داشته است که عمدتاً ناشی از نیاز به راه‌حل‌های عددی کارآمد برای مسائل غیرخطی هندسی و ماده در مکانیک سازه‌ها می‌باشد. این روش به ابزاری همه‌کاره برای فرم یابی، تحلیل گذرا و بهینه‌سازی سازه‌های پیچیده از جمله صفحات میندلین تبدیل شده است. توانایی روش‌های رهایی پویا در تحلیل قاب‌ها و خرپاها [۱۷]، صفحات خمشی کلاسیک [۱۲]، قاب‌های سه‌بعدی با و بدون اثر برش [۱۸] و همچنین پوسته‌ها [۱۱] توسط رضایی‌پژند و همکاران ارزیابی شده است. لازم به ذکر است که این سازه‌ها رفتار هندسی غیرخطی داشتند. در یک مطالعه مقایسه‌ای جامع، توانایی ۵۱ روش مختلف رهایی پویا بررسی و نتایج آن ارائه شده است [۱۹].

پژوهش‌گران داخلی نیز در زمینه‌ی روش رهایی پویا، به تحقیق پرداخته‌اند. سرافرازی و لبافی با استفاده از میرایی متمرکز، عامل میرایی را در گام‌های خاصی وارد کردند تا کارمایه جنبشی را به سوی صفر برود [۲۰]. زردی و علامتیان با استفاده از نگره‌ی گرگورین بهبودیافته، کران‌های جدیدی برای کمیت جرم ساختگی در رهایی پویای به دست آوردند [۲۱]. لاج عباسی و همکاران، با بهره‌جستن از درون‌یابی لاگرانژ الگوریتم نوینی برای روش رهایی پویا با میرایی جنبشی ارائه دادند [۲۲]. استیری و باغبان از این شیوه برای تعیین نقاط حدی و پیمایش مسیر ایستایی سازه‌ها بهره‌جستند [۲۳] و [۲۴].

۱-۲- روش پادراکاکیس

در این شیوه، گام زمانی ثابت و برابر با یک است. پادراکاکیس، ماتریس‌های جرم و میرایی را ضربی از ماتریس سختی پنداشت. برابری (۳) این را نشان می‌دهد. ضرایب فرضی جرم و میرایی، به ترتیب، با ρ و c نشان داده شده‌اند. این ضرایب را می‌توان از رابطه‌های (۴) و (۵) به دست آورد. درایه‌های قطری ماتریس سختی در ماتریس D جای دارند [۱۳].

$$M = \rho D \quad , \quad C = cD \quad (۳)$$

$$\left(\frac{t^2}{\rho}\right)_{opt} = \frac{4}{\lambda_{Bmin} \lambda_{Bmax}} \quad (۴)$$

$$\left(\frac{ct}{\rho}\right)_{opt} = \frac{4\sqrt{\lambda_{Bmax} \cdot \lambda_{Bmin}}}{\lambda_{Bmax} + \lambda_{Bmin}} \quad (۵)$$

در اینجا، کمینه و بیشینه مقادیر ویژه‌ی ماتریس $D^{-1}S$ به ترتیب، با λ_{Bmin} و λ_{Bmax} نشان داده شده‌اند. مقادیر این عامل‌ها با بهره جستن از معادلات (۶) و (۷) به دست می‌آیند. در روش پادراکاکیس، ابتدا مقادیر λ_{Bmin} و λ_{Bmax} فرض می‌شود و فرآیند رهایی پویا آغاز می‌گردد. هنگامی که مقدار نرخ کاهش خطا بین دو تکرار متوالی (λ_{DR}) به یک مقدار ثابت همگرا شود، مقدار λ_{Bmin} حساب می‌شود. مقدار λ_{DR} ، با برابری (۸) تعیین می‌گردد.

$$\lambda_{Bmin} = -\frac{\lambda_{DR}^2 - \frac{4}{2 + ct/\rho} \lambda_{DR} + \frac{2 - ct/\rho}{2 + ct/\rho}}{\frac{2t^2/\rho}{2 + ct/\rho} \lambda_{DR}} \quad (۶)$$

$$|\lambda_{Bmax}| < \max_i \sum_{j=1}^{ndof} |b_{ij}| \quad (۷)$$

$$\lambda_{DR} = \frac{\|X^{n+1} - X^n\|}{\|X^n - X^{n-1}\|} \quad (۸)$$

۲-۲- روش آندروود

رابطه‌ی (۹)، ماتریس جرم این شیوه را نشان می‌دهد. در اینجا، مقدار گام زمانی برابر با ۱ است. همچنین، ماتریس میرایی از رابطه‌ی $C = 2\omega_0 M$ به دست می‌آید. در این برابری، ω_0 کمینه فرکانس

سیستم دینامیکی ساختگی است. مقدار آن از رابطه‌ی (۱۰) محاسبه می‌گردد. آندروود فرض کرد که اگر عبارت زیر رادیکال این رابطه منفی شود، مقدار میرایی صفر باشد. همچنین، اگر ω_0 بزرگ‌تر از ۲ شود، مقداری کمتر از ۲ (مثلاً ۱/۹) در محاسبات استفاده گردد. در اینجا، S^L ماتریس سختی محلی است و درایه‌های آن با استفاده از معادله‌ی (۱۱) تعیین می‌شوند [۸].

$$m_{ii} = \frac{t^2}{4} \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \quad (۹)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{X^T S^L X}{X^T M X}} \quad (۱۰)$$

$$S_{ii}^{L,n} = \frac{f_i(X^n) - f_i(X^{n-1})}{t \dot{X}_i^{n-\frac{1}{2}}} \quad (۱۱)$$

۳-۲- روش کانگ

در این روش، ماتریس جرم از مجموع مقادیر مطلق درایه‌های هر سطر ماتریس سختی حساب می‌شود. رابطه‌ی (۱۲) این را نشان می‌دهد. افزون بر این، کانگ برابری‌های (۱۳) و (۱۴) را، به ترتیب، برای تعیین میرایی و گام زمانی پیشنهاد داد [۲۵].

$$m_{ii} = \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \quad (۱۲)$$

$$C_{ii} = 2 \sqrt{\frac{\omega_0}{1 + \omega_0}} m_{ii} \quad (۱۳)$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{1 + \omega_0}} \quad (۱۴)$$

در روابط فوق، ω_0 فرکانس حداقل سیستم در حالت ارتعاش آزاد است. این عامل با استفاده از اصل ریلی و با بهره جستن از برابری (۱۵) به دست می‌آید. ماتریس سختی با نماد S نمایش داده شده است.

$$\omega_0 = \frac{X^T S X}{X^T M X} \quad (۱۵)$$

۴-۲- روش ژانگ

ژانگ و یو میرایی را از $C = 2\omega_0 M$ حساب کردند. عامل ω_0 از رابطه‌ی (۱۶) به دست می‌آید [۲۶].

$$\dot{\mathbf{X}}^n = \frac{\mathbf{X}^n - \mathbf{X}^{n-1}}{t} \quad (22)$$

۷-۲- فرآیند میرایی جنبشی

در روش رهایی پویا جنبشی، مقدار میرایی برابر با صفر است. در این راه کار، هنگامی که انرژی جنبشی کاهش می‌یابد، نقطه‌ی بیشینه در نمودار انرژی جنبشی به دست می‌آید. در این زمان و برای شروع مجدد فرآیند رهایی پویا، جابجایی‌ها و سرعت‌ها به ترتیب با استفاده از روابط (۲۳) و (۲۴) به دست می‌آیند. باید دانست، در برابری (۲۴)، بردار نیروی پسماند در موقعیت $\mathbf{X}^{n-\frac{1}{2}}$ که در معادله‌ی (۲۳) محاسبه شده است، تعیین می‌شود [۱۶].

$$\mathbf{X}^{n-\frac{1}{2}} = \mathbf{X}^{n+1} - \frac{3}{2}t\dot{\mathbf{X}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{t^2}{2M}\mathbf{R}^n \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{X}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{t}{2M}\mathbf{R}^n \quad (24)$$

سپس تکرارهای رهایی پویا با استفاده از این بردارهای جابجایی و سرعت آغاز می‌شود تا زمانی که انرژی جنبشی مجدداً به حداکثر برسد. این فرآیند تا رسیدن به پاسخ نهایی ادامه می‌یابد. گام زمانی فرضی در این الگوریتم برابر با یک است. علاوه بر این، ماتریس جرم با استفاده از رابطه‌ی (۲۵) به دست می‌آید.

$$m_{ii} = \frac{t^2}{2} \sum_{j=1}^{ndof} |S_{ij}| \quad (25)$$

۸-۲- روش کمینه نیروی پسماند

رضایی پزند و همکاران، تابع نیروی پسماند سیستم دینامیکی ساختگی را به صورت معادله‌ی (۲۶) نوشتند. با کمینه‌سازی این تابع نسبت به گام زمانی، برابری (۲۷) برای تعیین گام زمانی تکرارهای رهایی پویا به دست می‌آید. نمو نیروی داخلی را می‌توان با رابطه‌ی (۲۸) محاسبه کرد [۲۸]. در اینجا، ماتریس سختی مماسی با \mathbf{S} نمایش داده شده است. علاوه بر این، ماتریس‌های جرم و میرایی، به ترتیب، از شیوه‌ی آندروود و ژانگ محاسبه می‌شوند.

$$UBF = (\mathbf{R} - t^{n+1}\dot{\mathbf{f}})^2 \quad (26)$$

$$t^{n+1} = \frac{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{f}}}{\dot{\mathbf{f}}^T \dot{\mathbf{f}}} \quad (27)$$

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{S}\dot{\mathbf{X}} \quad (28)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{X}^T \mathbf{F}}{\mathbf{X}^T \mathbf{M} \mathbf{X}}} \quad (16)$$

ماتریس جرم از برابری (۹) با گام زمانی برابر با یک به دست می‌آید. همچنین، این پژوهشگران به جای استفاده از بردار صفر، جابجایی‌های اولیه غیرصفر را پیشنهاد کردند. رضایی پزند و همکاران نشان دادند که محاسبه‌ی جابجایی اولیه بر اساس روش ژانگ کارایی کافی ندارد [۱۷]؛ بنابراین، در این مقاله برای شروع فرآیند رهایی پویا از بردار صفر استفاده شده است.

۵-۲- الگوریتم میرایی گره‌ای

در بیشتر شیوه‌ها، میرایی در همه‌ی درجات آزادی یکسان در نظر گرفته می‌شود. به جای این کار، کدخدایان و همکاران پیشنهاد کردند که میرایی در هر گره متفاوت و برای درجات آزادی یک گره یکسان باشد. ایشان، روابط زیر را برای محاسبه‌ی ضریب میرایی ارائه دادند [۱۴]. در اینجا، N شمار گره‌های سازه است. ماتریس جرم نیز مانند معادله‌ی (۹) و با گام زمانی برابر با یک به دست می‌آید.

$$C_k = \zeta_k m_{kk} \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (17)$$

$$\zeta_k^n = 2 \left[\frac{(X_k^n)^T f_k^n}{(X_k^n)^T m_{kk}^n (X_k^n)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

۶-۲- روش رضایی پزند و تقویان حکاک

رضایی پزند و تقویان حکاک فرض کردند که درایه‌های قطری ماتریس جرم ضریبی از درایه‌های قطری ماتریس سختی هستند. معادله‌ی (۱۹) رویکرد ریاضی این روش را نشان می‌دهد. این پژوهشگران مقدار α را ۰/۶ پیشنهاد کردند.

$$m_{ii} = \alpha \cdot S_{ii} \quad (19)$$

در این روش، میرایی از روش کانگ و گام زمانی برابر با یک به دست می‌آید. همچنین، جابجایی به جای برابری (۲) از رابطه‌ی (۲۰) محاسبه می‌شود. شتاب $\ddot{\mathbf{X}}$ و سرعت $\dot{\mathbf{X}}$ نیز با استفاده از معادلات (۲۱) و (۲۲) تعیین می‌گردند. در این روابط، بردار \mathbf{R} بردار نیروی پسماند می‌باشد [۲۷].

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + t\dot{\mathbf{X}}^n + \frac{t^2}{2}\ddot{\mathbf{X}}^n \quad (20)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}^n = \frac{\mathbf{R}^n - \mathbf{C}^n \dot{\mathbf{X}}^n}{\mathbf{M}^n} \quad (21)$$

انتخاب می‌شود. علاوه بر این، گام زمانی برابر با یک است و ماتریس جرم از معادله‌ی (۲۹) به دست می‌آید.

۲-۱۲- روش میرایی صفر

با استفاده از میرایی صفر، رضایی‌پژند و سرافرازی رابطه‌ی (۳۳) را برای نسبت گام زمانی γ پیشنهاد کردند [۳۰]. همچنین، برای محاسبه‌ی کمینه مقدار ویژه λ_1 ، روش تکرار توانی به کار گرفته شد. در روش میرایی صفر، ماتریس جرم از برابری (۲۹) به دست می‌آید. همچنین، بردارهای جابجایی و سرعت، به‌جای رابطه‌های (۱) و (۲)، به ترتیب، از معادلات (۳۴) و (۳۵) حساب می‌شوند.

$$\gamma = \frac{t^{n+1}}{t^n} = \frac{I}{(I + \sqrt{\lambda_1})^2} \quad (33)$$

$$\dot{\mathbf{X}}^{n+1} = \gamma^n \left(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{R} + \dot{\mathbf{X}}^n \right) \quad (34)$$

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{X}^n + \dot{\mathbf{X}}^{n+1} \quad (35)$$

۳- مثال‌های عددی

در این بخش، با استفاده از روش‌های تعریف‌شده در بخش قبل، صفحات مختلف با در نظر گرفتن اثر برش مرتبه‌ی اول، به‌صورت خطی تحلیل می‌شوند. برای این کار، زبان فترن جهت برنامه‌نویسی شیوه‌های بیان‌شده به کار رفته است. لبه‌هایی که دارای خط‌چین هستند، نمایانگر تکیه‌گاه ساده می‌باشند. لبه‌های گیردار نیز با هاشور توپر نمایش داده شده‌اند. تعداد تکرارها و مدت زمان تحلیل در هر نمونه مشخص می‌شود. لازم به ذکر است که این روش‌ها از دقت یکسانی برخوردارند. با این حال، تعداد تکرارها و زمان تحلیل برای رسیدن به پاسخ متفاوت می‌باشد. برای همگرایی می‌توان از دو معیار نیروی نامیزان و انرژی استفاده کرد. در این مقاله، چون مقایسه‌ی روش‌ها مورد نظر است، برای اینکه شرایط یکسانی برای همه‌ی شیوه‌ها برقرار شود از معیار نیروی نامیزان استفاده شد. در این پژوهش، خطای نیروی پسماند قابل قبول برای همه روش‌ها برابر با 10^{-4} در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته (E) و نسبت پواسون (ν) به ترتیب برابر با ۲۰۰ گیگاپاسکال و ۰/۳ هستند. علاوه بر این، در هر مثال، گرهی که دارای خیز بیشینه می‌باشد با حرف M نشان داده می‌شود. امتیاز هر شیوه، بر اساس شمار تکرارها و مدت زمان تحلیل، به ترتیب،

۲-۹- روش رضایی‌پژند و علامتیان

رضایی‌پژند و علامتیان، برابری‌های (۲۹) و (۳۰) را، به ترتیب، برای جرم و میرایی روش رهایی پویا پیشنهاد دادند. همچنین، کمینه فرکانس ساختگی ω_0 از رابطه‌ی (۱۶) به دست می‌آید. علاوه بر این، گام زمانی یک در محاسبات ایشان استفاده می‌شود [۷].

$$m_{ii} = \text{Max} \left(\frac{(t^n)^2}{2} S_{ii}^n, \frac{(t^n)^2}{2} \sum_{j=1}^{\text{ndof}} |S_{ij}^n| \right) \quad (29)$$

$$C_{ii} = \sqrt{\omega_0^2 (4 - t^2 \omega_0^2)} m_{ii} \quad (30)$$

۲-۱۰- روش کمینه انرژی پسماند

رضایی‌پژند و همکاران، تابع انرژی پسماند را به‌صورت برابری (۳۱) تعریف کردند [۲۸]. سپس، این تابع را نسبت به گام زمانی کمینه کردند. این عملیات منجر به دست آمدن دو مقدار برای گام زمانی می‌شود که یکی از آن‌ها تابع انرژی پسماند را به حداقل می‌رساند.

$$UBE = \sum_{i=1}^{\text{ndof}} \left[t^{n+1} \dot{X}_i^{n+1/2} \left(r_i^n - t^{n+1} \dot{f}_i^{n+1/2} \right) \right]^2 \quad (31)$$

از سوی دیگر، اگر معادله مشخصه‌ی (۳۱) جواب حقیقی نداشته باشد، معادله‌ی (۲۷) برای ارزیابی گام زمانی استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که ماتریس‌های جرم و میرایی، به ترتیب، از رابطه‌های (۲۹) و (۳۰) به دست می‌آیند.

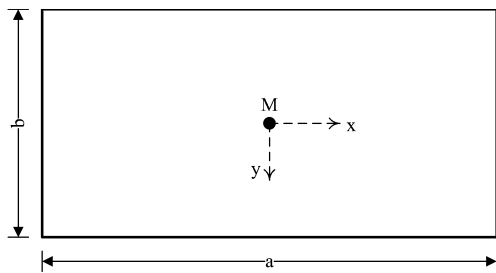
۲-۱۱- روش رضایی‌پژند و سرافرازی

رضایی‌پژند و سرافرازی برای تعیین کمینه فرکانس ارتعاش سیستم، از فرآیند تکرار توانی استفاده کردند. آن‌ها در هر تکرار رهایی پویا، از یک گام الگوریتم تکرار توانی بهره جستند. در شیوه‌ی ایشان، ماتریس میرایی از برابری (۳۲) به دست می‌آید [۲۹].

$$C_{ii}^n = \sqrt{\lambda_1^n (4 - \lambda_1^n)} m_{ii}^n \quad (32)$$

در اینجا، $\lambda_1^n = \lambda_1^n + 4$ به‌عنوان مقدار ویژه منتقل‌شده شناخته می‌شود. λ^n ضریب مقدار ویژه در حل با روش تکرار توانی است. در هر گام از رهایی پویا، این ضریب با مقدار ویژه‌ی به دست آمده از اصل ریلی مقایسه می‌گردد. بین این دو مقدار ویژه، عدد کمتر

استفاده در تحلیل‌ها 20×20 انتخاب شده‌اند. به دلیل تقارن، یک چهارم صفحه مدل‌سازی شده است. عرض صفحه (b) برابر با ۱ متر است. ضخامت صفحه‌ی گیردار 0.12 میلی‌متر و این مقدار برای صفحه با تکیه‌گاه ساده برابر با 0.15 میلی‌متر است. برای گسترده‌ی وارد بر صفحه‌ی گیردار و صفحه با تکیه‌گاه ساده، به ترتیب، برابر با 5860 و 10000 کیلو نیوتن بر مترمربع است. بیشترین خیز در وسط صفحه رخ می‌دهد. مقدار آن برای صفحات مربعی گیردار و ساده، به ترتیب، برابر با 0.08688 و 0.07336 میلی‌متر به دست آمد. این مقدار برای ورق گیردار مستطیلی، 0.1577 میلی‌متر بود.



شکل ۱: صفحه مستطیلی

تعداد تکرارهای رهایی پویا و مدت زمان تحلیل در جدول ۲ تا جدول ۴ گزارش شده است. بر اساس جدول ۲، روش MRE برترین شیوه‌ی تحلیل این صفحه بر پایه‌ی شمار تکرارها می‌باشد. بنابراین رتبه این روش یک است. همچنین، روش آندروود، سریع‌ترین راه‌کار در رسیدن به پاسخ است. روش میرایی جنبشی نیز، ضعیف‌ترین شیوه‌ی حل ورق مربعی گیردار بود. نتایج صفحه‌ی مستطیلی با تکیه‌گاه گیردار (جدول ۳) نشان می‌دهد روش RPTH نمی‌تواند صفحه‌ی مستطیلی با تکیه‌گاه گیردار را تحلیل کند. بنابراین، رتبه این روش صفر در نظر گرفته شده است. افزون بر این، کارایی الگوریتم‌های آندروود و میرایی گرهی یکسان است. به سخن دیگر، شماره تکرارها و زمان تحلیل این دو شیوه، یکسان به دست آمد. باید دانست که این موضوع در سایر نمونه‌ها وجود نداشت. روش‌های MRE و میرایی گرهای به‌عنوان کارآمدترین تکنیک‌ها برای تحلیل این صفحه‌ی چهارضلعی، به ترتیب، بر پایه‌ی شمار تکرارها و زمان تحلیل شناخته می‌شوند. روش‌های میرایی جنبشی و پاپادراکاکیس نیز در رتبه‌ی پایینی تحلیل این صفحه جای دارند. برای ورق با تکیه‌گاه‌های ساده، فن‌های MRE و MdDR، به ترتیب، بهترین روش‌ها از نظر شمار تکرار و زمان تحلیل بودند. همچنین، شیوه‌ی میرایی گرهی در رده پایانی حل این صفحه جای داشت.

با رابطه‌های (۳۶) و (۳۷) به دست می‌آید. بر پایه‌ی این امتیازها، رتبه‌ی هر راه‌کار تعیین می‌گردد.

$$E_I = 100 \times \left(\frac{I_{max} - I}{I_{max} - I_{min}} \right) \quad (36)$$

$$E_T = 100 \times \left(\frac{T_{max} - T}{T_{max} - T_{min}} \right) \quad (37)$$

تعداد تکرارها و مدت زمان تحلیل، به ترتیب، با نمادهای T و I نمایش داده شده‌اند. روشی که بیشترین تعداد تکرار و مدت زمان تحلیل را دارد، امتیاز صفر می‌گیرد. همچنین، امتیاز 100 به روشی اختصاص می‌یابد که کمترین تعداد تکرار و مدت زمان تحلیل را داشته باشد. امتیاز هر روش، رتبه آن را تعیین می‌کند. در جدول ۱ شماره و نماد روش‌هایی که در بخش پیشین معرفی شدند، درج شده است. این نمادها و شماره‌ها برای بحث و بررسی نتایج نمونه‌های حل شده به کار می‌رود.

جدول ۱: روش‌های رهایی پویا به کار رفته و علائم آن‌ها

شماره	روش	نماد
۱	پاپادراکاکیس	Papadrakakis
۲	آندروود	Underwood
۳	چیانگ	Qiang
۴	ژانگ	Zhang 1
۵	میرایی گرهای	Nodal Damping
۶	رضایی‌پژند و تقویان حکاک	RPTH
۷	رهايي پویای جنبشی	kdDR
۸	کمیته‌سازی نیروی پسماند	MFT
۹	رضایی‌پژند و علامتیان	mdDR
۱۰	کمیته‌سازی انرژی پسماند	MRE
۱۱	رضایی‌پژند و سرافرازی	RPS
۱۲	میرایی صفر	zdDR

۳-۱- صفحه چهار ضلعی با شرایط تکیه‌گاهی مختلف

اولین مثال، یک صفحه‌ی چهار ضلعی است که بار گسترده‌ی یکنواخت بر آن اعمال شده است. این سازه در سه حالت مختلف تحلیل شده است. دو حالت از این صفحه‌ها، مربعی هستند که یکی دارای تکیه‌گاه گیردار و دیگری دارای تکیه‌گاه ساده است. حالت سوم، یک صفحه مستطیلی با تکیه‌گاه گیردار است که نسبت طول به عرض آن برابر با ۲ می‌باشد. شکل ۱، مدل این سازه‌ها را نشان می‌دهد. شبکه‌های مورد

جدول ۲: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه مربعی با تکیه‌گاه گیردار

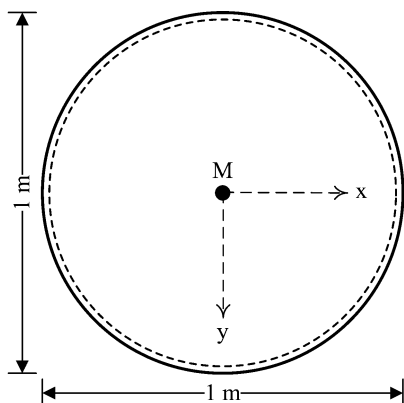
رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
11	1.23261	17.625	11	34.5471	3482	1
1	100	8.891	3	89.5648	2243	2
8	62.8972	12.172	8	75.6217	2557	3
6	77.7338	10.86	9	69.627	2692	4
2	90.9872	9.688	4	83.0817	2389	5
7	75.0876	11.094	5	81.5719	2423	6
12	0	17.734	12	0	4260	7
4	81.1037	10.562	2	99.8668	2011	8
3	84.6319	10.25	6	75.9769	2549	9
5	81.0924	10.563	1	100	2008	10
9	29.8541	15.094	7	75.9325	2550	11
10	15.0175	16.406	10	68.0284	2728	12

جدول ۴: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه مربعی با تکیه‌گاه ساده

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
11	78.877	51.546	11	84.9483	8697	1
2	99.6179	21.906	7	98.2396	4567	2
5	97.9889	24.234	6	98.6323	4445	3
3	99.5088	22.062	9	97.8985	4673	4
12	0	164.266	12	0	35093	5
4	98.3493	23.719	3	98.9702	4340	6
8	95.8567	27.281	10	94.8508	5620	7
7	97.1688	25.406	2	99.5784	4151	8
1	100	21.36	4	98.6387	4443	9
6	97.3437	25.156	1	100	4020	10
9	92.325	32.328	5	98.6355	4444	11
10	91.232	33.89	8	98.1495	4595	12

۳-۲- صفحه‌ی دایروی

صفحه‌ی دایروی شکل ۲ مورد تحلیل قرار می‌گیرد. قطر این ورق ۱ متر است. به دلیل تقارن در بارگذاری و هندسه صفحه، یک چهارم آن مدل‌سازی می‌شود. برای تحلیل این صفحه، از ۶۷ المان استفاده شده است. کل بار اعمال شده بر صفحه معادل ۹۱۵/۷۵۱ کیلوپاسکال و ضخامت صفحه، ۰/۱۵ متر است. بیشترین خیز متناظر با این بار که در مرکز صفحه رخ می‌دهد، برابر با ۰/۰۶۴۶۳ میلی‌متر به دست آمد. نتایج تحلیل در جدول ۵ ارائه شده است. در اینجا نیز روش‌های RPS، mdDR و کانگ مشابه عمل می‌کنند. دلیل این رفتار در مثال قبلی توضیح داده شد. بر اساس نتایج به‌دست آمده، روش MRE کارآمدترین و روش پاپادراکیس کم‌بازده‌ترین روش برای تحلیل این صفحه از منظر شمار تکرار هستند. افزون بر این، راه‌کار mdDR، سریع‌ترین شیوه در رسیدن به پاسخ درست بود.



شکل ۲: صفحه‌ی دایروی

نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که فرآیندهای RPS و mdDR رفتار مشابهی دارند؛ به عبارت دیگر، تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به پاسخ تقریباً یکسان است. همان‌طور که در روش RPS بیان شد، مقدار ویژه حداقل که با اصل ریلی و روش تکرار توانی محاسبه می‌شود، برای تعیین میرایی به کار می‌رود. تکنیک mdDR نیز از اصل ریلی استفاده می‌کند. از طرف دیگر، معادلات (۳۰) و (۳۲) که برای محاسبه‌ی میرایی استفاده می‌شوند، هم‌ریشه هستند. بنابراین، نتیجه‌گیری می‌شود که فرکانس حداقلی که از اصل ریلی به دست می‌آید کمتر از مقداری است که با روش تکرار توانی حاصل می‌شود. همچنین، باید افزود که روش کانگ تقریباً مشابه RPS و mdDR است، زیرا این روش‌ها نیز از اصل ریلی بهره می‌برند.

جدول ۳: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه مستطیلی با تکیه‌گاه گیردار

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
11	0	22.328	9	31.7293	4229	1
2	98.4688	12.296	3	81.8466	2948	2
7	65.1747	15.688	6	63.1847	3425	3
6	77.1398	14.469	8	56.338	3600	4
1	100	12.14	3	81.8466	2948	5
0			0			6
9	13.4963	20.953	10	0	5040	7
3	84.04	13.766	2	94.1706	2633	8
4	83.1272	13.859	4	63.3412	3421	9
5	77.4539	14.437	1	100	2484	10
8	17.3341	20.562	5	63.302	3422	11
10	7.05732	21.609	7	56.3772	3599	12

جدول ۵: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی دایره‌ای

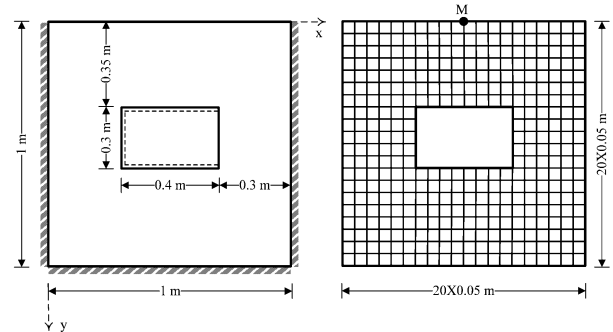
روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	10342	0	11	13.594	0	12
2	4198	93.2888	6	3.375	99.8437	2
3	4163	93.8202	5	4.875	85.1881	6
4	4373	90.6316	8	3.406	99.5408	3
5	8150	33.2827	10	6.047	73.7372	8
6	3908	97.6921	2	4.328	90.5325	5
7	5050	80.3523	9	4.047	93.278	4
8	3920	97.5099	3	6	74.1964	7
9	4162	93.8354	4	3.359	100	1
10	3756	100	1	6.25	71.7538	9
11	4163	93.8202	5	8.344	51.2946	10
12	4296	91.8008	7	8.703	47.787	11

جدول ۶: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه مستطیلی با بازشو

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	5180	67.0676	11	575.203	22.6252	9
2	2883	93.8923	2	179.516	100	1
3	4115	79.5048	7	357.015	65.2909	8
4	4318	77.1342	8	268.422	82.6148	4
5	10923	0	12	681.86	1.7689	11
6	3610	85.4023	4	314.204	73.6624	6
7	4610	73.7242	10	314.625	73.58	7
8	3181	90.4122	3	303.968	75.664	5
9	4103	79.645	5	256.343	84.9768	3
10	2360	100	1	226.906	90.7331	2
11	4104	79.6333	6	648.547	8.28311	10
12	4364	76.597	9	690.906	0	12

۳-۳- صفحه مستطیلی دارای بازشو

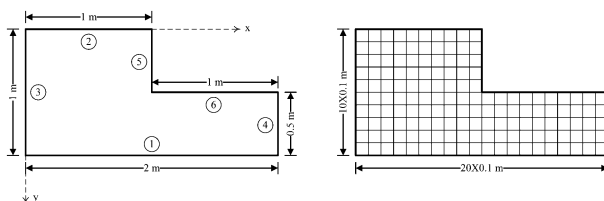
شکل ۳، صفحه مستطیلی با بازشو در مرکز را نشان می‌دهد. این نمونه با شبکه بندی ۲۰×۲۰ تحلیل می‌شود. مقدار بار گسترده‌ی یکنواخت برابر با ۹۱۵/۷۵۱ کیلوپاسکال است. ضخامت صفحه، ۰/۲ متر می‌باشد. خیز بیشینه در میانه‌ی لبه‌ی بالایی روی می‌دهد. جابجایی این گره در گام نهایی برابر با ۰/۱۹۰۸ میلی‌متر بود. تعداد تکرارها و مدت‌زمان تحلیل در جدول ۶ ارائه شده است. بر این اساس، روش میرایی گرهی، بدترین شیوه‌ی حل این صفحه می‌باشد. کارآمدترین روش برای تحلیل این صفحه، الگوریتم‌های MRE و میرایی گرهی هستند. همچنین، فرآیند میرایی صفر بدترین راه‌حل از نظر زمان محاسباتی است. شباهت روش‌های RPS، mdDR، و کانگ در این نمونه نیز مشاهده می‌شود.



شکل ۳: صفحه‌ی مستطیلی با بازشو

۴-۴- صفحه‌ی L شکل

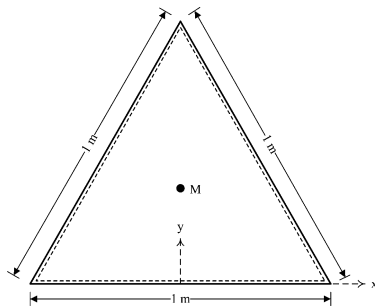
در این جا، صفحه L شکل نشان داده شده در شکل ۴ تحلیل می‌شود. بار گسترده‌ی یکنواخت برابر با ۹۱۵/۷۵۱ کیلوپاسکال می‌باشد. شرایط مرزی در امتداد لبه‌ها با عدد و نماد مشخص شده‌اند. لبه آزاد، تکیه‌گاه گیردار و تکیه‌گاه ساده به ترتیب با F، C، و S تعریف می‌شوند. به‌عنوان مثال، صفحه CSCSSS دارای تکیه‌گاه گیردار در لبه‌های ۱ و ۳ و سایر تکیه‌گاه‌ها ساده هستند. ضخامت ورق SFSSSF برابر ۰/۲۵ متر و دو صفحه‌ی دیگر، ۰/۲ متر است. بیشترین خیز صفحات CCCCCC و CSCSSS در نقطه‌ای با مختصات (۰/۵، ۰/۵) رخ می‌دهد. مقدار این خیز برای صفحه‌های CCCCCC و CSCSSS، به ترتیب، برابر با ۰/۱۴۴۱ و ۰/۱۸۷۶ میلی‌متر به دست آمد. این نقطه برای صفحه SFSSSF در وسط لبه ۲ قرار دارد. جابجایی بیشینه این صفحه برابر با ۰/۴۸۰۲ سانتی‌متر بود. رتبه‌بندی روش‌ها در جدول ۷ تا جدول ۹ ارائه شده است. مدت زمان تحلیل برای روش‌های MRE و آندروود کمتر از سایر روش‌هاست. همچنین، روش‌های MRE و MFT به تعداد تکرار کمتری برای رسیدن به پاسخ نیاز دارند. بدترین شیوه‌ها نیز، فرایندهای میرایی جنبشی و پاپادراکاکیس بودند.



شکل ۴: صفحه‌ی L شکل

۳-۵- صفحه‌ی مثلثی

اکنون، صفحه‌ی مثلثی شکل ۵ با بهره جستن از ۶۰ المان تحلیل می‌شود. بار گسترده‌ی یکنواخت به مقدار $1831/501$ کیلوپاسکال بر صفحه اعمال می‌شود. ضخامت صفحه $0/15$ متر در نظر گرفته شده است. بیشترین خیز در مرکز صفحه رخ می‌دهد. روش رهایی پویا، مقدار این خیز را $0/2373$ میلی‌متر به دست آورد. نتایج تحلیل در جدول ۱۰ ارائه شده است. بر این اساس، کمترین تعداد تکرار مربوط به تکنیک MRE است. همچنین، مدت زمان تحلیل برای الگوریتم آندروود کمترین مقدار را دارد. لازم به ذکر است که نیروی پسماند به دست آمده در فرآیند RPTH از مقدار مجاز فراتر رفت. بنابراین، این شیوه توانایی حل این صفحه را نداشت و رتبه این روش صفر در نظر گرفته شده است.



شکل ۵: صفحه‌ی مثلثی

جدول ۱۰: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی مثلثی

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	3553	95.0031	10	3.969	89.7416	10
2	1409	99.4559	3	1.047	100	1
3	1562	99.1381	6	1.531	98.3008	4
4	1655	98.945	7	1.172	99.5612	2
5	49297	0	11	29.531	0	11
6	0	0	0	0	0	0
7	3060	96.027	9	2.266	95.7204	7
8	1251	99.784	2	1.765	97.4793	6
9	1550	99.163	4	1.219	99.3962	3
10	1147	100	1	1.719	97.6408	5
11	1552	99.1589	5	2.625	94.46	8
12	1731	98.7871	8	3	93.1435	9

۳-۶- صفحه‌ی متوازی الاضلاع

در این جا، تحلیل صفحه‌ی متوازی الاضلاع با شبکه‌بندی شکل ۶ انجام می‌شود. مقدار بار گسترده‌ی یکنواخت اعمال شده بر صفحه برابر با $1831/150$ پاسکال و ضخامت صفحه $0/2$ متر است. رتبه‌بندی روش‌ها در جدول ۱۱ گزارش شده است. در این نمونه، روش‌های MRE،

جدول ۷: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی CCCCCC

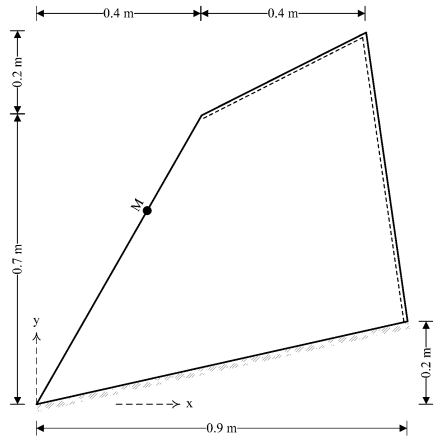
روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	2374	18.5544	11	24.11	0	12
2	1335	77.6892	3	10.109	95.0187	2
3	1611	61.9806	8	15.031	61.6152	8
4	1702	56.8014	9	12.719	77.3057	7
5	1425	72.5669	5	10.781	90.4581	4
6	1347	77.0063	4	12.235	80.5904	6
7	2700	0	12	21.625	16.8646	10
8	1062	93.2271	2	10.328	93.5324	3
9	1587	63.3466	6	11.953	82.5042	5
10	943	100	1	9.375	100	1
11	1588	63.2897	7	20.14	26.9427	9
12	1816	50.313	10	22.25	12.623	11

جدول ۸: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی SFSSSF

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	4534	84.7078	10	88.219	68.047	11
2	2593	96.5475	3	30.594	100	1
3	2990	94.1259	7	44.078	92.5231	7
4	3141	93.2048	8	36.234	96.8726	5
5	18421	0	12	210.937	0	12
6	2800	95.2849	4	41.188	94.1256	6
7	4630	84.1222	11	55.75	86.051	8
8	2144	99.2863	2	33.687	98.2849	3
9	2983	94.1686	5	35.859	97.0806	4
10	2027	100	1	32.078	99.1771	2
11	2984	94.1625	6	72.688	76.6589	9
12	3183	92.9486	9	75.328	75.195	10

جدول ۹: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی CSCSSS

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	2699	90.2794	10	35.328	83.0391	11
2	1532	97.4455	3	13.234	99.5676	2
3	1799	95.806	7	19.203	95.1022	7
4	1899	95.1919	8	16.5	97.1243	6
5	17401	0	12	146.328	0	12
6	1557	97.292	4	16.468	97.1482	5
7	3090	87.8784	11	28.047	88.486	8
8	1214	99.3982	2	13.469	99.3918	3
9	1787	95.8796	5	15.406	97.9427	4
10	1116	100	1	12.656	100	1
11	1788	95.8735	6	28.547	88.1119	9
12	1996	94.5963	9	31.344	86.0195	10



شکل ۷: صفحه‌ی چهار ضلعی نامنتظم ۱

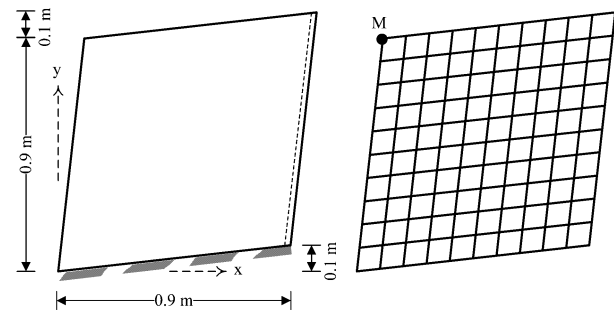
جدول ۱۲: رتبه بندی روش‌ها برای صفحه‌ی چهار ضلعی نامنتظم ۱

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
10	35.6224	319.922	10	68.7358	6024	1
1	100	87.891	3	96.1865	2756	2
6	87.3717	133.406	6	93.4397	3083	3
3	96.0377	102.172	7	92.1294	3239	4
11	0	448.313	11	0	14207	5
0			0			6
7	79.4036	162.125	9	79.6892	4720	7
5	89.7301	124.906	2	96.9845	2661	8
2	97.2993	97.625	4	93.4985	3076	9
4	94.1347	109.031	1	100	2302	10
8	60.2768	231.062	5	93.4901	3077	11
9	56.5701	244.422	8	92.1042	3242	12

۳-۸- صفحه‌ی چهار ضلعی نامنتظم ۲

یک صفحه‌ی چهارضلعی دیگر مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه‌ی این سازه در شکل ۸ نمایش داده شده است. بار اعمال شده بر این صفحه برابر با ۹۱۵/۷۵۱ کیلوپاسکال و ضخامت صفحه ۰/۱ متر است. بیشینه خیز در وسط لبه‌ی آزاد قرار دارد که مقدار آن برابر با ۰/۰۸۰۱۵ میلی‌متر به دست آمد. نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۱۳ گزارش شده‌اند. این جدول ناکارآمدی روش رضایی‌پژند و تقویان حکاک را نشان می‌دهد. کاراترین شیوه‌ها از منظر شمار تکرار و زمان تحلیل، به ترتیب، MRE و آندروود بودند. همچنین، باید اضافه کرد که روش‌های RPS، mdDR و کانگ برای رسیدن به پاسخ تعداد تکرار کم و بیش یکسانی دارند. به عبارت دیگر، این روش‌ها رفتار مشابهی از خود نشان داده‌اند.

MFT و آندروود به ترتیب رتبه‌های اول تا سوم را از نظر تعداد تکرار کسب کرده‌اند. همچنین، مدت زمان تحلیل تا رسیدن به خطای قابل قبول شیوه‌های آندروود، mdDR و ژانگ کمتر از سایر راه‌کارها بود. لازم به ذکر است که روش‌های روش‌های RPS، mdDR و کانگ از نظر تعداد تکرار رفتار مشابهی دارند. مقدار بیشینه خیز در گره‌ی گوشه‌ی این ورق، برابر با ۰/۰۶۴۹۲ میلی‌متر به دست آمد.



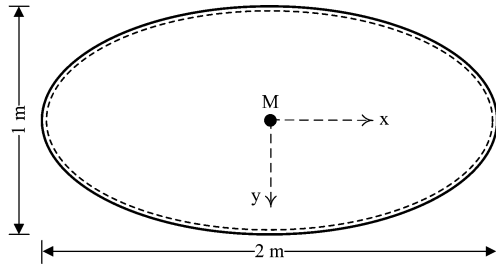
شکل ۶: صفحه‌ی متوازی الاضلاع

جدول ۱۱: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی متوازی الاضلاع

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
12	0	166.968	12	0	24677	1
1	100	26.469	3	98.9792	4993	2
5	95.2178	33.188	7	97.0534	5376	3
3	97.8199	29.532	9	95.7057	5644	4
11	70.6404	67.719	11	59.109	12922	5
4	96.3744	31.563	4	98.3909	5110	6
8	93.0498	36.234	10	89.742	6830	7
6	94.8178	33.75	2	99.7787	4834	8
2	98.6107	28.421	5	97.0634	5374	9
7	94.7729	33.813	1	100	4790	10
9	87.1771	44.485	6	97.0584	5375	11
10	85.9871	46.157	8	96.3494	5516	12

۳-۷- صفحه‌ی چهار ضلعی نامنتظم ۱

در ادامه، فرآیندهای مختلف رهایی پویا در تحلیل صفحه‌ای که در شکل ۷ نشان داده شده است بررسی می‌شوند. در این تحلیل، از ۲۳۳ المان صفحه خمشی استفاده شده است. این سازه تحت بار گسترده‌ی یکنواخت به مقدار ۱۸۳۱/۵۰۱ کیلوپاسکال قرار دارد. ضخامت ورق برابر ۰/۱۵ متر است. بیشینه خیز در گره M با مختصات (۰/۲۴، ۰/۴۲) رخ می‌دهد که مقدار آن برابر با ۰/۰۴۰۴۳ میلی‌متر است. رتبه‌بندی روش‌های به‌کار رفته در جدول ۱۲ درج شده است. بر این پایه، روش RPTH قادر به تحلیل این صفحه نیست. روش‌های آندروود و MRE بهترین رویکرد را در حل این ورق دارند. همچنین، روش‌های RPS، mdDR و کانگ رفتار مشابهی داشتند.



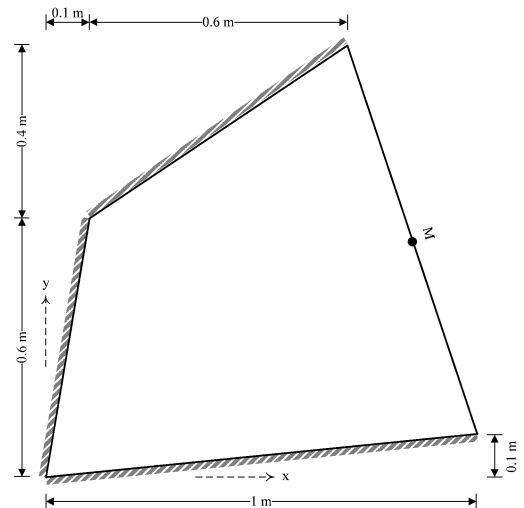
شکل ۹: صفحه بیضوی

جدول ۱۴: رتبه بندی روش‌ها برای صفحه بیضوی

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
12	0	4.421	12	0	6754	1
4	92.6554	1.469	9	85.4628	3162	2
5	86.2837	1.672	6	92.1009	2883	3
1	100	1.235	8	88.413	3038	4
10	57.3446	2.594	11	14.0614	6163	5
3	96.0766	1.36	1	100	2551	6
6	83.3647	1.765	10	56.4835	4380	7
7	73.0383	2.094	3	98.5962	2610	8
2	98.054	1.297	4	92.1961	2879	9
8	70.5901	2.172	2	98.62	2609	10
9	58.8198	2.547	5	92.1723	2880	11
11	53.4526	2.718	7	88.7937	3022	12

۳-۱۰- صفحه حلقه‌ای

در این مثال، به دلیل تقارن، یک چهارم صفحه صفحه شکل ۱۰ با ۹۰ المان مدل‌سازی و حل می‌گردد. مقدار بار گسترده‌ی یکنواخت برابر با ۱۸۳/۱۵۰ کیلوپاسکال و ضخامت ورق ۰/۲ متر هستند. جدول ۱۵ پاسخ‌ها را نشان می‌دهد. برای این سازه، کارآمدترین روش، kdDR است؛ به عبارت دیگر، این راه‌حل کمترین تعداد تکرار و کوتاه‌ترین مدت زمان تحلیل را برای رسیدن به پاسخ نیاز دارد. روش RPTH قادر به تحلیل این صفحه نیست. همچنین، فرآیندهای RPS، mdDR، و کانگ رفتار مشابهی دارند. افزون بر این، مقدار بیشینه خیز برابر با ۰/۰۷۷۵۳ میلی‌متر به دست آمد.



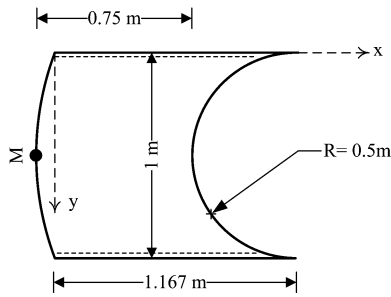
شکل ۸: صفحه چهار ضلعی نامنتظم ۲

جدول ۱۳: رتبه بندی روش‌ها برای صفحه چهار ضلعی نامنتظم ۲

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
11	0	28.141	11	0	4606	1
1	100	10.296	3	86.5832	2115	2
7	73.1129	15.094	7	67.0143	2678	3
6	80.9975	13.687	8	62.2523	2815	4
3	95.3544	11.125	4	80.0834	2302	5
0		0				6
8	49.9972	19.219	10	25.5822	3870	7
4	89.4873	12.172	2	91.7623	1966	8
5	85.4581	12.891	5	67.3271	2669	9
2	95.8812	11.031	1	100	1729	10
9	45.9681	19.938	6	67.2923	2670	11
10	37.9154	21.375	9	60.0626	2878	12

۳-۹- صفحه بیضوی

در این بخش، صفحه بیضوی شکل ۹ تحلیل می‌شود. مقدار بار گسترده‌ی یکنواخت ۹۱۵/۷۵۱ کیلوپاسکال و ضخامت ورق ۰/۲ متر هستند. به دلیل تقارن، یک چهارم صفحه با ۴۴ المان مدل‌سازی شد. امتیازهای روش‌ها در جدول ۱۴ درج شده‌اند. در میان روش‌های همگرا، الگوریتم رضایی‌پژند و تقویان حکاک بهترین راه‌حل بر پایه‌ی شمار تکرارها و شیوه‌ی زانگ، سریع‌ترین راه‌کار می‌باشند. افزون بر این، فرآیند پادراکیس ضعیف‌ترین روش است. از سوی دیگر، روش‌های RPS و mdDR رفتار مشابهی دارند. باید دانست، بیشترین خیز در مرکز صفحه رخ می‌دهد که مقدار آن ۰/۰۶۳۶۱ میلی‌متر به دست آمد.



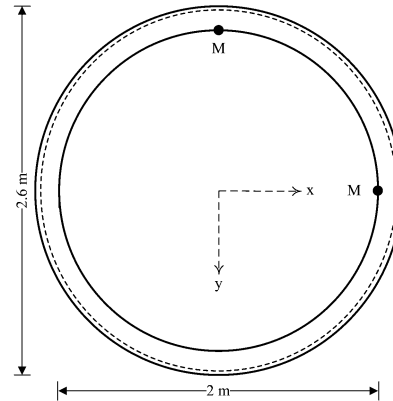
شکل ۱۱: صفحه با لبه‌های قوسی

جدول ۱۶: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه با لبه‌های قوسی

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
10	50.5414	27.188	10	76.1242	16133	1
1	100	5.125	3	99.8706	4943	2
5	92.4701	8.484	6	97.585	6020	3
2	97.7942	6.109	8	96.9527	6318	4
11	0	49.734	11	0	52005	5
0			0			6
4	94.2545	7.688	9	94.4019	7520	7
6	89.9482	9.609	1	100	4882	8
3	97.7919	6.11	4	97.5935	6016	9
7	88.4777	10.265	2	99.9788	4892	10
8	75.3413	16.125	5	97.5914	6017	11
9	72.5392	17.375	7	97.1818	6210	12

۳-۱۲- صفحه دایره‌ای با بازشوی مستطیلی

در ادامه، صفحه‌ی شکل ۱۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقدار بار گسترده‌ی یکنواخت برابر با $1831/502$ کیلوپاسکال است. ضخامت ورق $0/15$ متر می‌باشد. این سازه متقارن است و یک چهارم آن مش‌بندی می‌شود. برای حل این صفحه از ۵۲ المان استفاده شد. تعداد تکرارها و مدت زمان تحلیل در جدول ۱۷ درج شده است. مقدار بیشینه‌ی خیز برابر با $0/1933$ میلی‌متر به دست آمد. روش RPTH قادر به حل این ورق نیست. در نتیجه، رتبه‌ی آن صفر می‌باشد. روش‌های کانگ و RPS شمار تکرار یکسانی داشتند. قوی‌ترین شیوه‌ها بر پایه‌ی شمار تکرار و زمان تحلیل، به ترتیب، MFT و آندروود بودند.



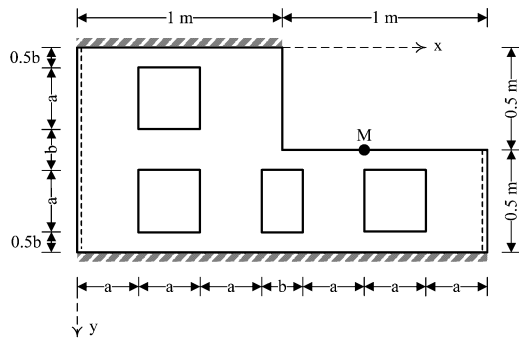
شکل ۱۰: صفحه‌ی حلقوی

جدول ۱۵: رتبه‌بندی روش‌ها برای صفحه‌ی حلقوی

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
11	0	286.468	10	0	34786	1
4	93.4526	70.812	8	90.8009	11136	2
5	90.7846	76.969	4	94.8169	10090	3
3	95.111	66.985	7	92.901	10589	4
10	30.7941	215.406	9	2.76434	34066	5
0			0			6
1	100	55.703	1	100	8740	7
7	88.6928	81.796	5	94.7746	10101	8
2	96.3235	64.187	3	94.8207	10089	9
6	89.478	79.984	2	96.0992	9756	10
8	80.6218	100.421	4	94.8169	10090	11
9	80.276	101.219	6	94.3485	10212	12

۳-۱۱- صفحه با لبه‌های قوسی

در این بخش، سازه‌ی شکل ۱۱ تحلیل می‌شود. لبه‌ی سمت راست، یک قطاع دایره با شعاع $0/5$ متر و لبه‌ی سمت چپ، یک قوس سه‌نقطه‌ای است. در این مدل از ۷۴ المان استفاده شده است. ضخامت ورق $0/15$ متر می‌باشد. مقدار بار گسترده اعمال شده برابر با $915/750$ کیلوپاسکال است. بیشینه‌ی خیز در نقطه‌ای با مختصات $(0, -0/25)$ رخ می‌دهد که مقدار آن برابر با $0/249$ میلی‌متر به دست آمد. نتایج در جدول ۱۶ ارائه شده‌اند. روش رضایی‌پژند و تقویان حکاک قادر به ارائه پاسخ نمی‌باشد. بر اساس شمار تکرارها، کارآمدترین روش، فرآیند MFT و بر پایه‌ی زمان تحلیل، آندروود است. همچنین، ناکارآمدترین راه‌کارها، الگوریتم‌های میرایی گرهی و پاپادراکاکیس بودند. ذکر این نکته ضروری است که روش‌های RPS، mdDR و کانگ رفتار مشابهی از خود نشان داده‌اند. شیوه‌های MFT و MRE نیز شمار تکرار کم و بیش یکسانی داشتند.



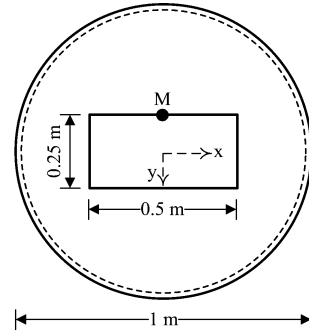
شکل ۱۳: صفحه‌ی L شکل با بازشو

جدول ۱۸: رتبه بندی روش‌ها برای صفحه‌ی L شکل با بازشو

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	4649	8.55873	10	201.187	17.8844	9
2	2736	79.4368	2	71.547	100	1
3	3577	48.2771	6	126.219	65.3701	7
4	3756	41.6451	7	97.468	83.5813	4
5	3942	34.7536	9	102.141	80.6214	5
6		0	0			0
7	4880	0	11	136.422	58.9074	8
8	3058	67.5065	3	115.063	72.4364	6
9	3568	48.6106	4	92.735	86.5793	3
10	2181	100	1	83.281	92.5675	2
11	4649	8.55873	10	201.187	17.8844	9
12	2736	79.4368	2	71.547	100	1

۳-۱۴- صفحه‌ی مستطیلی با بازشوی دایروی

در این جا، صفحه‌ی مستطیلی با بازشوی دایره‌ای شکل ۱۴ حل می‌شود. بار گسترده‌ی یکنواخت وارد بر ورق $915/751$ کیلوپاسکال و ضخامت $0/15$ متر هستند. به دلیل تقارن، یک چهارم صفحه با 76 المان مدل‌سازی می‌گردد. جدول ۱۹ رتبه‌بندی روش‌ها را نشان می‌دهد. بر اساس این جدول، روش MFT دارای کمترین تکرار برای رسیدن به پاسخ درست است. از این رو، رتبه‌ی آن یک می‌شود. همچنین، شیوه‌ی آندروود، سریعترین نرخ همگرایی را دارد. باید افزود، فرآیندهای RPS، mdDR و کانگ شمار تکرار یکسانی داشتند. ناکارآمدترین راه‌کار حل این صفحه، الگوریتم پاپادراکاکیس بود. بیشینه خیز این ورق $0/2521$ میلی‌متر به دست آمد.



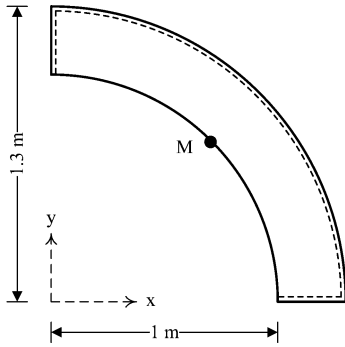
شکل ۱۲: صفحه‌ی دایره‌ای با بازشوی مستطیلی

جدول ۱۷: رتبه‌بندی برای صفحه‌ی دایره‌ای با بازشوی مستطیلی

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	17416	0	10	15.203	0	11
2	5097	92.9455	4	2.937	99.3681	2
3	5178	92.3344	5	3.828	92.15	5
4	5434	90.4029	8	3.015	98.7362	3
5	15314	15.8594	9	8.25	56.327	10
6		0	0			0
7	5400	90.6594	7	2.859	100	1
8	4701	95.9333	3	5.062	82.1533	6
9	4162	100	1	3.359	95.9494	4
10	4529	97.231	2	5.172	81.2622	7
11	5178	92.3344	5	6.859	67.5956	8
12	5315	91.3007	6	7.047	66.0726	9

۳-۱۳- صفحه L شکل با بازشو

صفحه‌ی شکل ۱۳ با دوازده روش مختلف رهایی پویا تحلیل می‌شود. مقادیر a و b به ترتیب برابر با $0/3$ و $0/2$ هستند. بار گسترده‌ی یکنواخت $183/150$ کیلوپاسکال و ضخامت ورق $0/25$ متر می‌باشند. یادآوری می‌شود که این صفحه بدون بازشو در مثال‌های پیشین تحلیل شد. بیشینه خیز در گره‌ای با مختصات $(0/5, 1/4)$ رخ می‌دهد که مقدار جابجایی بیشینه برابر با $0/0576$ میلی‌متر است. برای تحلیل این صفحه، ۱۹۹ المان خمشی به کار رفت. نتایج به دست آمده در جدول ۱۸ ارائه شده‌اند. مقدار خطای نیروی پسماند در روش رضایی‌پژند و تقویان حکاک به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛ بنابراین، پاسخ این روش واگرا بوده و رتبه آن صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین، تعداد تکرارها در فرآیندهای RPS و کانگ یکسان است و این روش‌ها رفتار مشابهی از خود نشان داده‌اند. لازم به ذکر است که روش‌های MRE و آندروود برترین شیوه‌های حل این صفحه هستند.



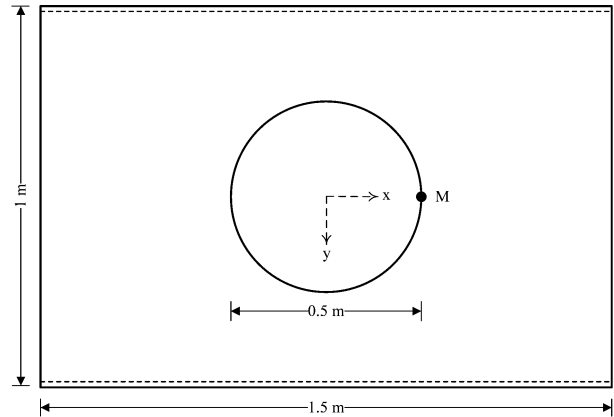
شکل ۱۵: یک چهارم صفحه‌ی حلقوی

جدول ۲۰: رتبه‌بندی روش‌ها برای یک چهارم صفحه‌ی حلقوی

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
10	64.014	57.953	10	74.9609	7429	1
5	96.9059	29.219	9	92.4655	4741	2
7	94.5993	31.234	5	95.3894	4292	3
2	98.5691	27.766	7	93.9763	4509	4
11	0	113.875	11	0	18940	5
0			0			6
4	97.4073	28.781	8	93.4488	4590	7
6	95.3147	30.609	2	98.2352	3855	8
1	100	26.516	3	95.4024	4290	9
3	97.872	28.375	1	100	3584	10
9	82.5788	41.735	4	95.3959	4291	11
8	82.6864	41.641	6	94.5233	4425	12

۳-۱۶- یک چهارم صفحه دایره‌ای

در آخرین نمونه، به تحلیل یک چهارم صفحه دایره‌ای پرداخته می‌شود. شکل ۱۶ هندسه‌ی این سازه را نشان می‌دهد. مدل‌سازی با استفاده از ۱۱۳ المان انجام شد. مقدار بار اعمال شده برابر با ۱۸۳/۱۵۰ کیلوپاسکال می‌باشد. ضخامت صفحه ۰/۱۵ متر در نظر گرفته شده است. بیشینه‌ی خیز در گره مرکزی لبه بیرونی رخ می‌دهد. مقدار آن، ۱/۹۴۳ میلی‌متر به دست آمد. نتایج در جدول ۲۱ درج شده‌اند. در این‌جا نیز، راه‌کار رضایی پژند و تقویان حکاک توانایی رسیدن به پاسخ را ندارد. افزون بر این، شیوه‌های MRE و میرایی جنبشی، برترین روش‌ها، به ترتیب، از منظر شمار تکرار و زمان تحلیل بودند. ناکارآمدترین روش نیز فرایند پاپادراکاکیس بود.



شکل ۱۴: صفحه‌ی مستطیلی با بازو دایروی

جدول ۱۹: رتبه‌بندی برای صفحه‌ی مستطیلی با بازو دایروی

رتبه	امتیاز	زمان (ثانیه)	رتبه	امتیاز	تعداد کل تکرارها	روش
12	0	120.562	11	0	26477	1
1	100	25.344	3	98.9189	7079	2
7	92.4846	32.5	7	94.7833	7890	3
4	95.9966	29.156	9	92.8047	8278	4
2	98.1296	27.125	5	96.0734	7637	5
5	94.208	30.859	4	97.0933	7437	6
9	88.8256	35.984	10	82.9016	10220	7
6	92.6978	32.297	1	100	6867	8
3	97.2274	27.984	6	94.7884	7889	9
8	91.5657	33.375	2	99.3167	7001	10
10	79.8	44.578	7	94.7833	7890	11
11	78.5366	45.781	8	94.0235	8039	12

۳-۱۵- یک چهارم صفحه‌ی حلقوی

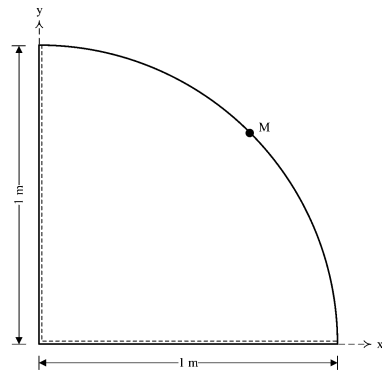
اکنون، صفحه‌ی شکل ۱۵ با ۹۰ المان خمشی حل می‌شود. مقدار بار گسترده‌ی یکنواخت ۱۸۳/۱۵۰ کیلوپاسکال و ضخامت ورق ۰/۲ متر است. بیشینه‌ی خیز در وسط لبه داخلی رخ می‌دهد که مقدار آن برابر با ۰/۱۴۰۶ میلی‌متر به دست آمد. جدول ۲۰ تعداد تکرارها و مدت زمان تحلیل را نشان می‌دهد. در این نمونه، شیوه‌ی RPTH توانایی رسیدن به پاسخ را نداشت. برترین روش حل این ورق، شیوه‌های MRE و mdDR بودند. راه‌کار میرایی گرهی نیز ضعیف‌ترین فرایند حل این ورق بود.

۴- رتبه‌بندی روش‌ها

بر اساس نتایج هر نمونه، به هر شیوه رتبه‌ای بین یک تا دوازده اختصاص داده شده است. رتبه‌ی یک نشان‌دهنده بهترین روش و رتبه‌ی دوازده بیانگر ضعیف‌ترین روش است. رتبه‌ی j برای روش i با نماد Q_{ij} نشان داده می‌شود. به عنوان مثال، بر اساس تعداد تکرارها، روش MRE در پانزده مثال، رتبه نخست را کسب کرده است. بنابراین، مقدار Q_{i1} برای این روش برابر با پانزده خواهد بود. مقدار Q_{i10} نشان‌دهنده تعداد سازه‌هایی است که روش i قادر به حل آن نبوده است. بر اساس مقادیر Q_{ij} ، امتیاز هر روش i به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S_{ij} = 100 \times \sum_{j=1}^{12} Q_{ij} \times (13 - j) / 240 \quad (38)$$

اگر یک روش در هر ۲۰ مثال رتبه اول را کسب کند، امتیاز ۲۴۰ به دست می‌آورد. در نتیجه، امتیاز S_{ij} برای این روش برابر با ۱۰۰ خواهد بود. اگر روشی قادر به ارائه پاسخ نباشد، در معادله‌ی (۳۸) لحاظ نمی‌شود. رتبه‌ها و امتیازها بر اساس شمار تکرارها و زمان تحلیل، به ترتیب، در جدول ۲۲ و جدول ۲۳ درج شده‌اند.



شکل ۱۶: یک چهارم صفحه دایره‌ای

جدول ۲۱: رتبه‌بندی روش‌ها برای یک چهارم صفحه‌ی دایره‌ای

روش	تعداد کل تکرارها	امتیاز	رتبه	زمان (ثانیه)	امتیاز	رتبه
1	45043	0	11	426.422	0	11
2	10491	97.4531	4	76.188	99.773	2
3	10559	97.2613	7	91.563	95.393	6
4	11072	95.8144	9	80.359	98.5847	4
5	17982	76.3249	10	130.078	84.421	10
6			0			0
7	10295	98.0059	3	75.391	100	1
8	10057	98.6772	2	94.063	94.6808	7
9	10553	97.2782	5	76.578	99.6619	3
10	9588	100	1	90.484	95.7004	5
11	10557	97.267	6	124.75	85.9388	9
12	10695	96.8777	8	124.047	86.1391	8

جدول ۲۲: رتبه‌بندی روش‌ها بر اساس تعداد تکرارها

رتبه	روش	امتیاز S_{ij}	Q_{ij}												
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	MRE	97.9167	0	15	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	MFT	89.1667	0	2	12	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	Underwood	73.3333	0	0	2	11	2	0	1	1	1	2	0	0	0
4	mdDR	72.0833	0	1	0	2	8	6	3	0	0	0	0	0	0
5	RPS	62.5	0	0	0	0	2	9	6	3	0	0	0	0	0
6	Qiang	55.8333	0	0	0	0	1	3	7	7	2	0	0	0	0
7	zdDR	42.5	0	0	0	0	0	0	3	4	7	4	2	0	0
8	Zhang	41.25	0	0	0	0	0	0	0	5	9	6	0	0	0
9	RPTH	39.5833	10	1	1	1	6	1	0	0	0	0	0	0	0
10	Nodal Damping	32.5	0	0	0	1	2	2	0	0	0	3	2	6	4
10	kdDR	32.5	0	1	0	1	0	0	0	1	1	4	7	3	2
11	Papadrakakis	20.4167	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	8	2

جدول ۲۳: رتبه‌بندی روش‌ها بر اساس مدت زمان تحلیل

رتبه	روش	امتیاز S_{ij}	Q_{ij}												
			0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
			J=0	J=1	J=2	J=3	J=4	J=5	J=6	J=7	J=8	J=9	J=10	J=11	J=12
1	Underwood	80.7971	0	10	7	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0
2	mdDR	73.1884	0	3	4	7	4	2	0	0	0	0	0	0	0
3	Zhang	66.3043	0	1	3	6	4	1	4	1	0	0	0	0	0
4	MRE	59.7826	0	2	4	1	1	4	2	3	2	1	0	0	0
5	MFT	55.4348	0	0	0	4	2	2	7	5	0	0	0	0	0
6	Qiang	48.913	0	0	0	0	1	6	3	7	3	0	0	0	0
7	kdDR	47.1014	0	3	0	0	3	0	1	3	6	2	1	0	1
8	Nodal Damping	33.6957	0	1	2	1	1	1	0	0	1	0	4	6	3
9	RPS	29.7101	0	0	0	0	0	0	0	0	6	10	4	0	0
10	RPTH	28.6232	10	0	0	1	2	3	3	1	0	0	0	0	0
11	zdDR	22.4638	0	0	0	0	0	0	0	0	2	5	7	5	1
12	Papadrakakis	15.5797	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	9	5

در این شیوه دارند. در دوازده الگوریتم مقایسه شده در این مقاله، این عامل‌ها از روش‌های گوناگونی به دست آمده‌اند. در بیشتر راه‌کارها، گام زمانی برابر یک در نظر گرفته می‌شوند. با وجود این، در مقاله‌ی حاضر، دو روش کمینه انرژی پسماند و روش کمینه نیروی پسماند نیز به کار رفته‌اند که گام زمانی را بر اساس رابطه‌ای به دست می‌آورند که الزاماً برابر یک نیست. این دو شیوه برپایه‌ی شمار تکرارهای مورد نیاز برای رسیدن به پاسخ، در رتبه‌های اول و دوم جای داشتند. اما بر اساس سرعت همگرایی و زمان رسیدن به پاسخ درست، رتبه‌ی چهارم و پنجم را به دست آوردند. افزون بر این، ماتریس میرایی از روش‌های گوناگونی مانند ریلی، میرایی صفر و میرایی جنبشی به دست آمدند. نتایج نشان دادند که تعیین فرکانس بر اساس اصل ریلی و محاسبه‌ی ماتریس میرایی برپایه‌ی آن، بهترین شیوه می‌باشد.

۶- منابع

- [1] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2005.
- [2] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2006.
- [3] S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1959.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مطالعه مقایسه‌ای بین دوازده روش شناخته‌شده رهایی پویا برای تحلیل الاستیک صفحات میندلین انجام شد. ابتدا، روش رهایی پویا و رابطه سازی‌های آن معرفی گردید. سپس، الگوریتم‌های پیشین بیان شدند. در ادامه، نمونه‌های گوناگونی با رفتار خطی مورد تحلیل قرار گرفتند. رتبه‌بندی روش‌ها بر اساس تعداد تکرارها و مدت زمان تحلیل در هر مثال تعیین شد. بر اساس این مطالعه، روش رضایی‌پژند و علامتین که گام زمانی را با استفاده از کمینه کردن انرژی پسماند به دست می‌آورد، کمترین تعداد تکرار را برای رسیدن به پاسخ دارد. علامت اختصاری این روش MRE بود. همچنین باید افزود که روش‌های کمینه نیروی پسماند (MFT) و آندروود به ترتیب رتبه‌های بعدی را کسب کردند. علاوه بر این، بر اساس مدت زمان تحلیل، روش‌های آندروود، روش رضایی‌پژند و علامتین (mdDR) و ژانگ به ترتیب در رتبه‌های اول تا سوم قرار گرفتند. از سوی دیگر، فرآیند پادراکیس بیشترین تعداد تکرار و مدت زمان تحلیل را برای دستیابی به دقت مورد نظر نیاز داشت. از این رو، این روش ناکارآمدترین راه‌حل بود. همچنین، در اکثر نمونه‌های حل شده، روش‌های کنگ، RPS و mdDR رفتار مشابهی داشتند؛ به عبارت دیگر، تعداد تکرارها برای این روش‌ها تقریباً یکسان به دست آمد.

روش رهایی پویا به سه عامل ماتریس جرم، ماتریس میرایی و گام زمانی وابسته است. باید دانست، عامل‌های جرم و میرایی اثر بیشتری

- Structures*, Vol. 52, No. 1, pp. 1–8, 1994, doi: [10.1016/0045-7949\(94\)90249-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90249-6).
- [15] P. Cundall, “Explicit finite-difference methods in geomechanics,” in *Proc. 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Geomechanics*, Blacksburg, VA, USA, 1976.
- [16] B. H. V. Topping and P. Ivanyi, *Computer Aided Design of Cable Membrane Structures*. Scotland: Saxe-Coburg Publications, 2008, ch. Dynamic Relaxation, pp. 39–84.
- [17] M. Rezaiee-Pajand, S. R. Sarafrazi, and H. Rezaiee, “Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures,” *Computers & Structures*, Vol. 112–113, pp. 295–310, 2012, doi: [10.1016/j.compstruc.2012.08.007](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.08.007).
- [18] M. Rezaiee-Pajand and H. Estiri, “Comparative analysis of three-dimensional frames by dynamic relaxation methods,” *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, pp. 1–16, 2017, doi: [10.1080/15376494.2017.1285462](https://doi.org/10.1080/15376494.2017.1285462).
- [19] M. Rezaiee-Pajand, H. Estiri, and M. Mohammadi-Khatami, “Creating better dynamic relaxation methods,” *Engineering Computations*, Vol. 36, No. 5, pp. 1483–1521, 2019, doi: [10.1108/EC-08-2018-0384](https://doi.org/10.1108/EC-08-2018-0384).
- [20] S. R. Sarafrazi and S. F. Labbafi, “Dynamic relaxation with concentrated damping,” *Modares Civil Engineering Journal*, Vol. 17, No. 3, pp. 146–156, 2017.
- [21] A. Zardi and J. Alamatian, “A novel formulation for fictitious mass in viscous dynamic relaxation method,” *Ferdowsi Civil Engineering Journal*, Vol. 31, No. 1, pp. 15–30, 2018 (in Persian), doi: [10.22067/civil.v31i1.53685](https://doi.org/10.22067/civil.v31i1.53685).
- [22] M. Abbasi, A. Namdchi, and J. Alamatian, “A new formulation for kinetic dynamic relaxation method based on Lagrange interpolation,” *Sharif Journal of Civil Engineering*, Vol. 36, No. 2, pp. 61–69, 2021 (in Persian), doi: [10.24200/j30.2020.53836.2603](https://doi.org/10.24200/j30.2020.53836.2603).
- [23] H. Estiri and A. Baghban, “Finding limit points by dynamic relaxation method,” *Journal of*
- [4] G.-R. Liu and Y.-T. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Berlin, Germany: Springer, 2005.
- [5] A. S. Day, “An introduction to dynamic relaxation,” *The Engineer*, Vol. 219, pp. 218–221, 1965.
- [6] J. Otter *et al.*, “Discussion: Dynamic relaxation,” in *ICE Proceedings*, Vol. 37, No. 4, pp. 723–750, 1967.
- [7] M. Rezaiee-Pajand and J. Alamatian, “The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping,” *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 34, No. 1, pp. 109–133, 2010, doi: [10.12989/sem.2010.34.1.109](https://doi.org/10.12989/sem.2010.34.1.109).
- [8] P. Underwood, “Dynamic relaxation (in structural transient analysis),” in *Computational Methods for Transient Analysis*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1983, pp. 245–265.
- [9] M. Kadkhodayan, J. Alamatian, and G. J. Turvey, “A new fictitious time for the dynamic relaxation (DXDR) method,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 74, No. 6, pp. 996–1018, 2008, doi: [10.1002/nme.2201](https://doi.org/10.1002/nme.2201).
- [10] M. R. Barnes, “Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes,” *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 3, pp. 685–695, 1988, doi: [10.1016/0045-7949\(88\)90304-5](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90304-5).
- [11] M. Rezaiee-Pajand and H. Estiri, “Geometrically nonlinear analysis of shells by various dynamic relaxation methods,” *World Journal of Engineering*, Vol. 14, No. 5, pp. 381–405, 2017, doi: [10.1108/WJE-10-2016-0109](https://doi.org/10.1108/WJE-10-2016-0109).
- [12] M. Rezaiee-Pajand and H. Estiri, “A comparison of large deflection analysis of bending plates by dynamic relaxation,” *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 2016, doi: [10.3311/PPci.8728](https://doi.org/10.3311/PPci.8728).
- [13] M. Papadrakakis, “A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 25, No. 1, pp. 35–48, 1981, doi: [10.1016/0045-7825\(81\)90066-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90066-9).
- [14] L. C. Zhang, M. Kadkhodayan, and Y. W. Mai, “Development of the maDR method,” *Computers &*

- dynamic relaxation,” *International Journal of Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 11–22, 2006.
- [28] M. Rezaiee-Pajand, M. Kadkhodayan, and J. Alamatian, “Timestep selection for dynamic relaxation method,” *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, Vol. 40, No. 1, pp. 42–72, 2012, doi: [10.1080/15397734.2011.599311](https://doi.org/10.1080/15397734.2011.599311).
- [29] M. Rezaiee-Pajand and S. R. Sarafrazi, “Nonlinear structural analysis using dynamic relaxation method with improved convergence rate,” *International Journal of Computational Methods*, Vol. 7, No. 4, pp. 627–654, 2010, doi: [10.1142/S0219876210002386](https://doi.org/10.1142/S0219876210002386).
- [30] M. Rezaiee-Pajand and S. R. Sarafrazi, “Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping,” *Computers & Structures*, Vol. 89, nos. 13–14, pp. 1274–1285, 2011, doi: [10.1016/j.compstruc.2011.04.005](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.04.005).
- [24] H. Estiri and A. Baghban, “Tracing equilibrium paths using the dynamic relaxation method,” *Journal of Structural Mechanics and Solids*, Vol. 12, No. 6, pp. 35–48, 2022 (in Persian), doi: [10.22044/jsfm.2023.12271.3646](https://doi.org/10.22044/jsfm.2023.12271.3646).
- [25] S. Qiang, “An adaptive dynamic relaxation method for nonlinear problems,” *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 4, pp. 855–859, 1988, doi: [10.1016/0045-7949\(88\)90117-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(88)90117-4).
- [26] L. G. Zhang and T. X. Yu, “Modified adaptive dynamic relaxation method and its application to elastic–plastic bending and wrinkling of circular plates,” *Computers & Structures*, Vol. 33, No. 2, pp. 609–614, 1989, doi: [10.1016/0045-7949\(89\)90035-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90035-7).
- [27] M. Rezaiee-Pajand and M. Taghavian Hakkak, “Nonlinear analysis of truss structures using *Structure & Steel Research*, Vol. 16, No. 37, pp. 21–35, 2023.