



Modeling and Estimation of Spectral Stretching in Aluminum Beam Frequency Response Function Signals Using Experimental Modal Analysis and Adaptive Signal Processing

Mohammad Khakbaz^{*1} , Alireza Ebrahimi Hesari² , Amin Darani Goldarreh³ ,
Mehrdad Karimi¹

1. PhD student in Aerospace Engineering, Faculty of Graduate Studies, Shahid Sattari Aeronautical University of Sciences and Technology, Tehran, Iran
2. PhD student in Mechanical Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran
3. MSc student in Aerospace Engineering, Faculty of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Abstract

The high sensitivity of spectral strain estimation has made it a powerful tool for early detection of failures and dynamic nonlinear instabilities. In this study, first, the modal analysis of a free-free aluminum beam was addressed in the form of three experimental, analytical, and numerical approaches. In the modal section, the dynamic responses of the beam were recorded at six points with a calibrated hammer impact test. The experimental results were combined with signal analysis and advanced algorithms to obtain modal parameters, including natural frequencies, modal vectors, and frequency responses, with an accuracy of more than 90% compared to the analytical and numerical results. Numerical modeling in Abaqus showed that the results at frequencies of 80 to 1800 Hz corresponded with acceptable accuracy and were able to simulate the vibration behavior of the system with low error. In the second section, the analysis of dynamic signs and spectral strain of the frequency response function signal was performed using wavelet transform and short-time Fourier transform methods. The results of this analysis showed that at a frequency of 255 Hz, there is a significant dynamic anomaly in mode 2 with a high quality factor (more than 25) and a strain in the range of 4.5 to 6.5, indicating the possibility of cracks, loosening, or stiffness changes in the structure. This anomaly is stable over time and is associated with mode interaction and nonlinear phenomena.

Keywords

Modal analysis
Aluminum beam
Spectral Kurtosis
Frequency response function
Dynamic anomaly

Received: 20.07.2025

Revised: 08.11.2025

Accepted: 15.11.2025

* Corresponding Author

Mohammad Khakbaz

Email

Mohammadkhakbaz.eng@gmail.com

1- Introduction

Structural damage detection is one of the most important fields for investigating many multidisciplinary fields for structural safety. Cracks in beams lead to a decrease in stiffness, frequency, and a change in damping. The location and depth of the crack can be identified through changes in

dynamic characteristics [1, 2]. Since natural frequencies have a theoretical relationship with the location and size of the crack, it can be concluded that changes in the first two natural frequencies provide sufficient data to identify the type and depth of the crack [3]. The use of aluminum sections due

How to Cite this Article:

[1] M. Khakbaz, A. Ebrahimi Hesari, A. Darani Goldarreh, and M. Karimi, "Modeling and estimation of spectral stretching in aluminum beam frequency response function signals using experimental modal analysis and adaptive signal processing," *Journal of Science and Technology in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 219–240, 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.22034/stme.2025.535696.1151> (in Persian)



to their high tensile strength, corrosion resistance, and high fracture toughness can have a significant impact on preventing crack growth in various structures [4]. In numerical methods, Monte Carlo simulation is a method based on the statistical description of the system response under random inputs that provides insights into the behavior of the system under various uncertainties in the simulation output [5]. For large-scale engineering structures, small-scale modal analysis cannot be used, so parameter estimation methods based on acceleration and displacement should be used. Spectral Kurtosis, as an effective signal processing method, is applied to analyze the vibration and anomaly of the system by first decomposing it into the time-frequency domain, after which the stretching values are determined for each frequency band. The concept of spectral stretching analysis was first developed by Dwyer, a tool capable of identifying non-Gaussian features in different frequency bands using the fourth-order moment of the real part of the short-time Fourier transform (short-time Fourier transform). Dwyer only investigated the application of spectral stretching to stationary processes, while he did not consider the non-stationary vibration signals typical of rotating machines' effect on employee creativity, with its moderating role of creative efficiency. To examine this hypothesis, the structural equations modelling with the partial least squares method and SPSS and Smart PLS software have been used. This research also examines sub-hypotheses [6]. The main distinguishing point of this research is the simultaneous application of the short-time Fourier transform and the wavelet transform in the spectral elongation method for the analysis of random signals, while previous studies mainly used a single method for deterministic signals. This combined approach has a unique ability to identify nonlinear behaviors, low-amplitude frequency oscillations, and local instabilities of the structure that cannot be detected by traditional methods.

2- Research Methods

In this study, the modal analysis laboratory setup consists of an aluminum beam with free-end

boundary conditions, which is suspended horizontally by thin wires from six strategic points. This suspension allows the beam to be in a near-free condition without any physical restraints, and its natural vibrations are measured with minimal disturbance. A PCB 0803 impact hammer with a medium-tip head is used to excite the structure, which is equipped with a piezoelectric sensor to simultaneously measure the applied force. Impacts are applied to the aluminum beam at six marked points to allow the identification of all vibration modes in the desired frequency range. To measure the response, a PCB 352C22 single-axis accelerometer with a sensitivity of 10 mV is installed at the center of the bottom surface of the beam. A PCB 378B02 precision polarized microphone is also placed at a certain distance from the beam to record the acoustic response of the structure. The signals received from the sensors are amplified by a PCB 480E09 signal amplifier and then transmitted to a four-channel data acquisition system, model NI 9234, with a sampling accuracy of 24 bits and a sampling frequency of 25.6 kHz. The collected data are processed in the STAR modal analysis software environment, so that frequency response functions (FRF) are calculated using fast Fourier transform, and modal parameters, including natural frequencies, damping ratios, and modal shapes, are extracted using modal identification algorithms such as POLY MAX. To increase accuracy, each experiment is repeated three times with different numbers of nodes, and the average of the results is closest to the numerical and analytical solution results. In signal processing, to reduce spectral leakage, a Henning window is applied to the force signal and an exponential window is applied to the response signal. This laboratory setup allows for accurate identification of the dynamic properties of the beam with minimal error, which can be used to validate finite element models and predict the behavior of similar structures.

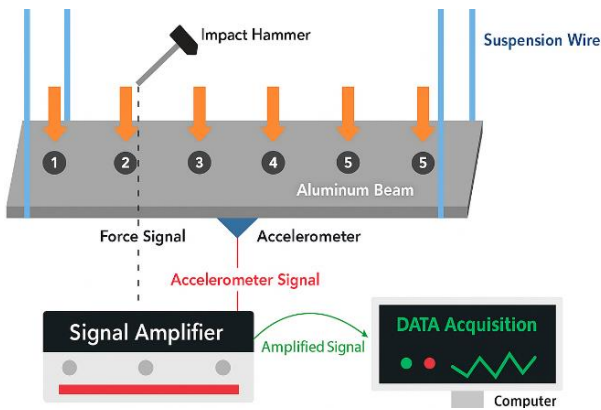


Figure 1: Graphical schematic of a free-free beam under impact excitation

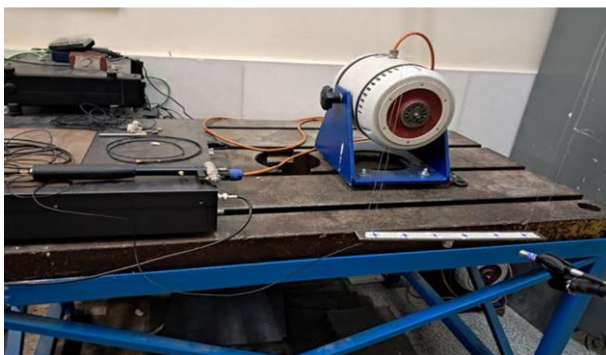


Figure 2: Experimental setup of a free-free beam under impact excitation

3- Results

The data collected from the experimental test can be run as a file in the Star signal analysis software, and After analyzing the resonances across the frequency range, the results of the frequency response function analysis show that the system under study has six dominant resonance modes at frequencies of 93.2, 254.8, 474.1, 835.9, 1307, and 1712.7 Hz, which form a complex pattern of dynamic behavior. A detailed examination of the frequency distribution of these modes indicates the existence of a multi-stage dynamic structure in which the spacing between successive modes does not follow a regular pattern, but rather indicates the effect of various physical parameters such as mass, stiffness, and damping in different regions of the system. Figure 3 shows the frequency response function diagram of the excited beam.

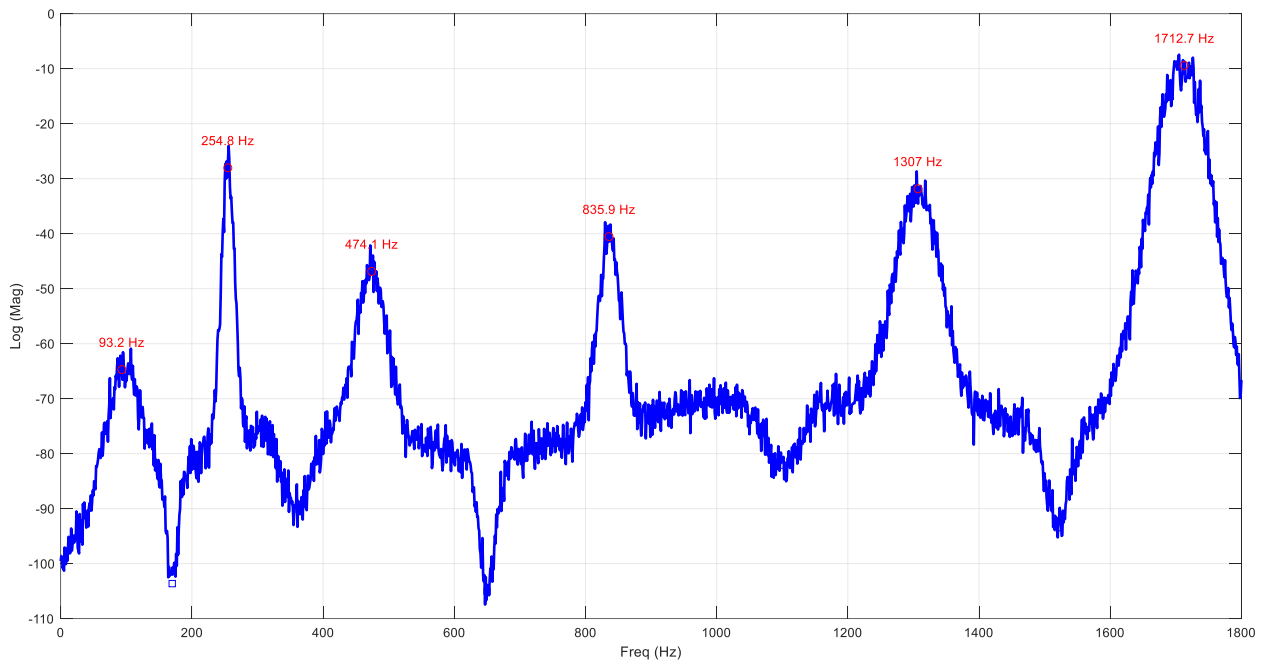


Figure 3: Frequency response function diagram of the system under excitation in Star software

The results of the fast Kurtogram show that the system has six distinct resonant modes at approximately 93, 255, 474, 836, 1307, and 1713

Hz. Examination of the spectral Kurtosis distribution at different bandwidth levels indicates the presence of significant anomalies in the second

mode (255 Hz), which, with a stretch value of 7.5, shows the highest sensitivity to possible defects. Due to its high quality factor ($Q=25$) and limited bandwidth, this mode is capable of detecting small changes in the dynamic response of the system. Comparing the Kurtogram pattern at different levels shows that the 1307 and 1713 Hz modes, with Kurtosis values of 6.0 and 7.2, respectively, have a higher bandwidth and moderate sensitivity to defects. The first mode (93 Hz), with an elongation of 4.8 and a relatively wide bandwidth, shows the least sensitivity for detecting anomalies. The energy distribution in the Kurtogram indicates that possible defects in the system are more detectable in the higher frequency range and with a narrower bandwidth. The results of this analysis demonstrate the importance of continuous monitoring of the 255 Hz mode as a key indicator for early detection of failure in the vibration system under study.

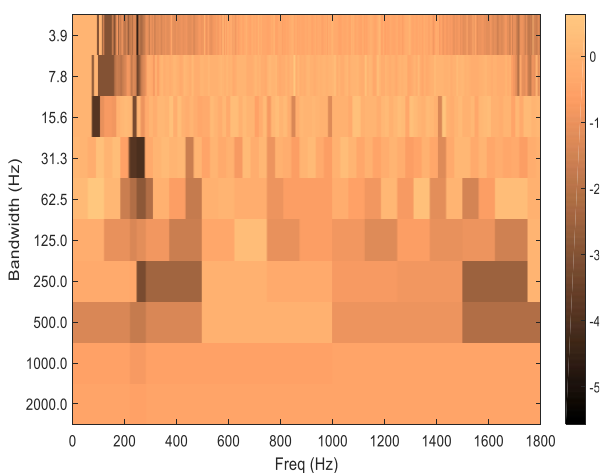


Figure 4: Kurtogram resulting from the system's frequency response function

4- Conclusion

The spectral elongation study of the free-free beam frequency response function has been carried out using two different methods, each of which provides a different view of the dynamic behavior of the system. In this study, the natural frequency and mode shapes of the shock-excited system were first obtained using three analytical, numerical, and experimental methods. The frequency results show that the natural frequencies of the system in all three cases have been recorded as acceptable values in the

range between 0 and 1800 Hz with an error rate of less than 10%. Comparing the results obtained from the spectral Kurtosis analysis with the two wavelet transform and short-time Fourier transform methods for the signal resulting from the system frequency response function shows that the wavelet method provides a larger and smoother picture of the system behavior and identifies the main peaks related to the lower modes well, while the short-time Fourier transform method shows more details of the frequency oscillations and is also able to identify sub-resonances and harmonics. The sharpness of the signal in the second mode (approximately 255 Hz) indicates that this mode is more susceptible to dynamic instability and system anomalies than the other modes. The overall distribution of the recorded strain values of the system has an almost normal shape with a mean of about 3, which is consistent with the statistical properties of Gaussian signals. The engineering applications of these studies are of great importance in modal identification, structural health monitoring, damage and crack detection, and investigation of the nonlinear behavior of dynamic systems. High strain values at certain frequencies can indicate high energy concentration or nonlinear behavior, which is very important in the design of vibration control systems.

5- References

- [1] A. M. Fadlalla, "Modal analysis of beams using finite element methods," *Journal of Civil and Construction Engineering Research*, Vol. 1, No. 1, 2024, doi: [10.1007/s40567-024-00119-9](https://doi.org/10.1007/s40567-024-00119-9).
- [2] M. Avcar, "Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions," *International Journal of Mechanical Applications*, Vol. 4, No. 3, pp. 94–100, 2014, doi: [10.5923/j.mechanics.20140403.03](https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20140403.03).
- [3] D. H. Nguyen, L. V. Ho, T. Bui-Tien, G. De Roeck, and M. A. Wahab, "Damage evaluation of free-free beam based on vibration testing," *Applied Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 142–152, 2020, doi: [10.3390/applmech1020010](https://doi.org/10.3390/applmech1020010).

-
- [1] M. A.-B. Abdo and M. Hori, "A numerical study of structural damage detection using changes in the rotation of mode shapes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 2, pp. 227–239, 2002, doi: [10.1006/jsvi.2001.3989](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3989).
- [2] F. Sayyad, B. Kumar, and S. Khan, "Approximate analytical method for damage detection in free–free beam by measurement of axial vibrations," *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 22, No. 1, pp. 133–142, 2012, doi: [10.1177/1056789512440897](https://doi.org/10.1177/1056789512440897).
- [3] H. Dai, Z. Zheng, and H. Ma, "An explicit method for simulating non-Gaussian and non-stationary stochastic processes by Karhunen–Loève and polynomial chaos expansion," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 115, pp. 1–13, 2019, doi: [10.1016/j.ymssp.2018.05.026](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.026).
- [4] S. Tavares, "Aircraft structural design and life-cycle assessment through digital twins," *Designs*, Vol. 8, No. 2, p. 29, 2024, doi: [10.3390/designs8020029](https://doi.org/10.3390/designs8020029).
- [5] J. Li, X. Zhu, S. S. Law, and B. Samali, "Indirect bridge modal parameters identification with one stationary and one moving sensor using stochastic subspace identification," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 446, pp. 1–21, 2019, doi: [10.1016/j.jsv.2019.01.024](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.024).
- [6] B. Eftekharijad, M. R. Carrasco, B. Charnley, and D. Mba, "The application of spectral kurtosis on acoustic emission and vibrations from a defective bearing," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 25, No. 1, pp. 266–284, 2011, doi: [10.1016/j.ymssp.2010.06.010](https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.06.010).



مدل سازی و تخمین کشیدگی طیفی در سیگنال های تابع پاسخ فرکانسی تیر آلومینیومی با بهره گیری از آنالیز مودال تجربی و پردازش سیگنال تطبیقی

محمد خاکباز*^۱، علیرضا ابراهیمی حصار^۲، امین دارانی گلدره^۳، مهرداد کریمی^۱

۱- دانشجوی دکتری تخصصی مهندسی هوافضا، دانشکده تحصیلات تکمیلی، دانشگاه علوم و فنون هوایی شهید ستاری، تهران، ایران

۲- دانشجوی دکتری تخصصی مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

کلمات کلیدی

آنالیز مودال
تیر آلومینیومی
کشیدگی طیفی
تابع پاسخ فرکانسی
ناهنجاری دینامیکی

حساسیت بالای تخمین کشیدگی طیفی، آن را به ابزار قدرتمندی برای تشخیص زودهنگام خرابی ها و ناپایداری های غیرخطی دینامیکی تبدیل کرده است. در این مطالعه، ابتدا به آنالیز مودال یک تیر آلومینیومی آزاد-آزاد در قالب سه رویکرد آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی پرداخته شد. در بخش مودالی، پاسخ های دینامیکی تیر در شش نقطه با آزمایش ضربه چکش کالیبره شده ثبت شد. نتایج آزمایشگاهی با تحلیل سیگنال و بهره گیری از الگوریتم های پیشرفته، پارامترهای مودال شامل فرکانس های طبیعی، بردارهای مودال و پاسخ های فرکانسی با دقت بالای بیش از ۹۰٪ در مقایسه با نتایج تحلیلی و عددی کنار هم قرار گرفتند. مدل سازی عددی در آپاکوس نشان داد که نتایج در فرکانس های ۸۰ تا ۱۸۰۰ هرتز با دقت قابل قبولی مطابقت دارد و توانسته است رفتار ارتعاشی سیستم را با خطای کم، شبیه سازی کند. در بخش دوم، تحلیل نشانه های دینامیکی و کشیدگی طیفی سیگنال تابع پاسخ فرکانسی، با روش های تبدیل موجک و تبدیل فوریه زمان-کوتاه انجام شد. نتایج این تحلیل نشان داد که در فرکانس ۲۵۵ هرتز، ناهنجاری دینامیکی قابل توجهی در مود ۲ با کیفیت فاکتور بالا (بیش از ۲۵) و کشیدگی در محدوده ۴/۵ تا ۶/۵ که نشان دهنده احتمال وجود ترک، شل شدگی یا تغییرات سختی در سازه است وجود دارد. این ناهنجاری در طول زمان پایداری داشته و با برهم کنش مودها و پدیده های غیرخطی همراه است.

دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۴/۲۹

بازنگری مقاله: ۱۴۰۴/۰۸/۱۷

پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۸/۲۴

*نویسنده مسئول

محمد خاکباز

ایمیل

Mohammadkhakbaz.eng@gmail.com

۱- مقدمه

آسیب، ویژگی های مودال مانند فرکانس های طبیعی، شکل مودها و نسبت های میرایی را تغییر می دهد. فرکانس طبیعی یکی از پرکاربردترین شاخص های آسیب است [۱، ۲]. از آنجا که اطلاعات جامع در مورد وجود ترک ها و آسیب های کوچک بعید است که تنها از طریق پاسخ ارتعاشی آزمایشی شناسایی شوند، در نتیجه تنها بسنده کردن به داده های شکل حالت ارتعاش به تنهایی برای شناسایی ترک کافی نیست. داده های شکل مودها که حاوی اطلاعاتی در مورد اثرات ترک موجود در ساختار تیر است، از طریق آزمایش مودال تجربی به دست

بیش از یک قرن است که محققان از تیرها به عنوان عناصر اصلی سازه های برای بررسی آسیب ناشی از بارگذاری های دینامیکی و استاتیکی استفاده می کنند [۱ و ۲]. تیر دوسر آزاد به علت عدم وجود قید می تواند آزادانه ارتعاش کند. از آنجا که تیر دوسر آزاد دارای شش فرکانس صلب می باشد، در آزمایش تجربی می توان با تغییر در نحوه بستن طناب های آویز، میزان سفتی یا فنریت سیستم را کم و زیاد کرد. آنالیز مودال، روشی مبتنی بر تشخیص آسیب های دینامیکی سازه ای است. آسیب را می توان با واکنش های ارتعاشی یک سازه تشخیص داد.

How to Cite this Article:

[1] M. Khakbaz, A. Ebrahimi Hesari, A. Darani Goldarreh, and M. Karimi, "Modeling and estimation of spectral stretching in aluminum beam frequency response function signals using experimental modal analysis and adaptive signal processing," *Journal of Science and Technology in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 219-240, 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.22034/stme.2025.535696.1151> (in Persian)



پس باید از روش‌های تخمین پارامتری که مبتنی بر شتاب و جابجایی هستند استفاده کرد [۱۵]. در مقایسه با تحلیل مودال مبتنی بر شتاب که یک روش قدیمی است، جابجایی می‌تواند به‌عنوان یک پارامتر شناسایی قابل اعتمادتر و قوی‌تر برای تحلیل مودال عملیاتی عمل کند. با این حال، برای سازه‌های فراساحلی که در محیط دریایی کار می‌کنند، یافتن یک نقطه مرجع ثابت برای اندازه‌گیری جابجایی‌های سازه دشوار است. علاوه بر این، هنگامی که جابجایی‌ها با یکپارچه‌سازی شتاب‌های اندازه‌گیری‌شده بازسازی می‌شوند، به دلیل سرعت و جابجایی اولیه نامعلوم و همچنین تأثیر نویز و اغتشاشات سیستم، رانش‌های غیرواقعی اتفاق می‌افتد. پس استراتژی شناسایی مؤلفه‌های جابجایی و تخریب سیستم در فرکانس‌های پایین‌تر معمول‌تر است [۱۶]. برای پایش وضعیت و سلامت ساختاری سازه‌هایی که تحت نیروهای آیرودینامیکی مرتعش می‌شوند، محاسبه نیروها در حوزه زمانی در امتداد پره‌ها و تخمین پاسخ سیستم با توجه به تحریکات تصادفی ضروری است. به همین منظور، استفاده از روش الگوریتم تجزیه دامنه فرکانس در جهت به‌دست آوردن پارامترهای مودالی و در نهایت تشخیص و مکان‌یابی آسیب‌های ناشی از تحریکات تصادفی بسیار حائز اهمیت است [۱۷]. رفتار دینامیکی سیستم‌های چند بدنه نقش بسزایی در طراحی سیستم‌های دینامیکی دارد. این سیستم‌ها از اجزای مختلفی از اتصالات منعطف و صلب ساخته شده‌اند. در این رابطه در سالیان اخیر تئوری‌های زیادی در جهت تحلیل سیستم‌های چند بدنه، بخصوص سیستم‌هایی که از تیرها و بدنه‌های صلب تشکیل شده‌اند، ارائه شده است. یک روش دقیق برای حل ارتعاشات آزاد سیستم‌های چند بدنه مانند تیرهای منعطف و اجسام صلب ارائه شده است. با استفاده از نظریه الگوریتم J_0 ، ترکیب خواص تیرهای اویلر برنولی و تیموشنکو و اجسام صلب به‌راحتی امکان‌پذیر بوده و نیازی به معکوس کردن ماتریس‌ها نیست. از طرفی این الگوریتم، مشکلات رایج در محاسبات عددی ویتریک-ویلیامز در تحلیل مودال را به‌صورت کامل حل کرده است [۱۸-۲۰]. مطالعه دایون و همکاران با پاسخ‌های ساختاری همراه با اجزای هارمونیک دامنه و فرکانس مدوله‌شده در یک محدوده کوتاه، ترکیبی رایج برای سیستم‌های مکانیکی با موتورها و سایر ماشین‌های دوار در حال کار، سروکار دارد. این اجزای هارمونیک داده‌های گمراه‌کننده‌ای را تولید می‌کنند که به اشتباه توسط روش‌های کلاسیک مورد استفاده در تحلیل مودال

می‌آید. پس داده‌های شکل مودهای بازسازی‌شده با روش اسپلاین^۱ درون‌یابی می‌شوند تا وجود موقعیت ترک را با وضوح بهتری به تصویر بکشند [۴]. یکی از تفاوت‌های غالب بین یک تیر آزاد و یک تیر گیردار این است که نوسانات آزاد یک تیر آزاد شامل حرکات بدنه صلب و ارتعاشات الاستیک است، در حالی که نوسانات یک تیر گیردار فقط از ارتعاشات الاستیک تشکیل شده است [۵]. کیانو و همکاران ارتعاشات آزاد یک تیر پلکانی با تکیه‌گاه‌های الاستیک چرخشی-انتقالی را بر اساس حل تحلیلی ماتریس انتقال^۲ بررسی کردند و این تحلیل، تحولی شگرف در زمینه بررسی ارتعاشات آزاد عناصر سازه‌ای بر اساس حل تحلیلی می‌باشد [۶]. یک روش جدید برای تحلیل مودال عملیاتی، آزمایش ارتعاشی بر روی روتور هلیکوپتر با مقیاس کاهش یافته است. طی تحقیقاتی که انجام شده است، از روش انرژی کرنشی معین و معیار اطمینان مودال می‌توان شاخص‌های آسیب مبتنی بر بارگذاری دینامیکی یک روتور هلیکوپتر را در جهت استخراج ضریب حساسیت و پایش وضعیت سیستم تخمین زد [۷ و ۸]. محققانی که در حال حاضر در زمینه تشخیص ترک از طریق تحلیل مودال کار می‌کنند، یک تحلیل دینامیکی تجربی گسترده از تیرهای دوسر آزاد با هدف اعتبارسنجی تکنیک‌های نظری توسعه‌یافته برای پیش‌بینی مکان و عمق ترک‌ها در این مدل تیرها انجام داده‌اند [۹]. شناسایی آسیب‌های سازه‌ای یکی از مهم‌ترین زمینه‌ها برای بررسی بسیاری از زمینه‌های چندرشته‌ای برای امنیت سازه است. ترک در تیر منجر به کاهش سختی، فرکانس و تغییر در میرایی می‌شود. شناسایی محل ترک و عمق آن را می‌توان از طریق تغییرات در مشخصات دینامیکی اندازه‌گیری کرد [۱۰ و ۱۱]. از آنجا که فرکانس‌های طبیعی با محل ترک و اندازه ترک رابطه نظری دارند، می‌توان نتیجه گرفت که تغییرات در دو فرکانس طبیعی اول، داده‌های کافی را برای شناسایی نوع و عمق ترک فراهم می‌کند [۱۲]. استفاده از مقاطع آلومینیومی به علت استحکام کششی بالا، مقاومت در برابر خوردگی و چقرمگی شکست بالا می‌تواند تأثیر بسزایی در جلوگیری از رشد ترک در سازه‌های مختلف داشته باشد [۱۳]. در روش‌های عددی، شبیه‌سازی مونت کارلو روشی مبتنی بر توصیف آماری پاسخ سیستم تحت ورودی‌های تصادفی است که بینش‌هایی در رابطه با رفتار سیستم تحت عدم قطعیت‌های مختلف در خروجی شبیه‌سازی ارائه می‌کند [۱۴]. برای سازه‌های مهندسی با مقیاس بزرگ نمی‌توان از آنالیز مودال کوچک استفاده کرد،

² Transmission Matrix¹ Spline Method

استفاده می‌کردند. این رویکرد ترکیبی، توانایی منحصربه‌فردی در شناسایی رفتارهای غیرخطی، نوسانات فرکانسی کم‌دامنه و ناپایداری‌های محلی سازه ایجاد کرده که در روش‌های سنتی قابل تشخیص نیستند. انتخاب هوشمندانه شش نقطه آنالیز، تعادل بهینه‌ای بین دقت و کارایی محاسباتی برقرار می‌کند که در پژوهش‌های مشابه کمتر به آن توجه شده است.

در این مقاله ابتدا، مقدمه‌ای جامع بر کاربردهای آنالیز مودال و اهمیت کشیدگی طیفی سیگنال‌های حاصل از توابع پاسخ فرکانسی در پژوهش‌های مختلف ارائه شده است. سپس در بخش معادلات، روابط ریاضی حاکم بر تیر دوسر آزاد شامل فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و محاسبه کشیدگی طیفی به‌وسیله روش‌های موجک و تبدیل فوریه زمان کوتاه تشریح گردیده است. در ادامه، روند آزمایش تجربی با چیدمان دقیق دستگاه‌ها و انجام آزمایش ضربه مودال توسط چکش بر روی شش گره متوالی تیر توضیح داده شده است. به‌منظور صحت‌سنجی نتایج، شبیه‌سازی عددی در نرم‌افزار المان محدود آباکوس انجام و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای به‌دست آمده با داده‌های تجربی مقایسه شده است. در بخش تحلیل کشیدگی طیفی، سیگنال‌های توابع پاسخ فرکانسی با کدنویسی در نرم‌افزار متلب پردازش و ضرایب موجک و تبدیل فوریه زمان کوتاه استخراج شده‌اند. در نهایت، نتایج حاصل از این تحلیل‌ها توانسته‌اند ناهنجاری‌ها و آسیب‌های موجود در گره‌های مورد بررسی را به‌طور دقیق شناسایی و مکان‌یابی کنند.

۲- معادلات و طرح مسئله

مسئله حول محور تیر آلومینیومی به طول ۵۴ سانتی‌متر عرض ۴/۵ سانتی‌متر و ضخامت ۵ میلی‌متر انجام می‌شود. شرایط مرزی تیر به‌صورت دو سر آزاد بوده و چگالی سطح معادل ۲۷۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب می‌باشد. برای یک مقطع مستطیلی، ممان اینرسی حول محور خنثی از معادله (۱) به‌دست می‌آید.

$$I = \frac{1}{12}bh^3 \quad (1)$$

که در معادله (۱)، b عرض تیر و h ضخامت تیر تعریف می‌شود. جرم تیر در واحد طول از معادله (۲) استخراج می‌شود که در آن ρ چگالی مقطع، m جرم تیر و A مساحت سطح مقطع تیر می‌باشد

$$m = \rho A \quad (2)$$

عملیاتی تفسیر شده‌اند. کار حاضر تلاش می‌کند تا ماکزیمم‌ها را در طیف‌های ناشی از اجزای هارمونیک و حالت‌های ساختاری متمایز کند. روش تشخیص پیشنهادی بر اساس کشیدگی طیفی بهینه‌سازی شده است و با سایر تعاریف کشیدگی طیفی که در ادبیات شرح داده شده است مقایسه شده است. پس از مطالعه پارامتری روش، یک مطالعه انتقادی بر روی شبیه‌سازی‌های عددی و سپس بر روی یک ساختار آزمایشی در حال عملیات به‌منظور ارزیابی عملکرد روش انجام می‌شود [۲۱]. کشیدگی طیفی به‌عنوان یک روش مؤثر پردازش سیگنال، برای تحلیل لرزش و ناهنجاری سیستم با تجزیه اولیه آن به دامنه زمان-فرکانس صورت می‌گیرد که پس از آن مقادیر کشیدگی برای هر باند فرکانسی تعیین می‌شود. مفهوم تحلیل کشیدگی طیفی برای اولین بار توسط دوایر توسعه یافت، ابزاری که قادر به شناسایی ویژگی‌های گیرگوسی در باندهای فرکانسی مختلف با استفاده از لحظه مرتبه چهارم قسمت واقعی تبدیل فوریه کوتاه‌مدت (تبدیل فوریه زمان-کوتاه) بود. دوایر تنها به بررسی کاربرد کشیدگی طیفی در فرآیندهای ثابت پرداخت، در حالی که سیگنال‌های لرزش غیرثابت معمول دستگاه‌های دوار را در نظر نگرفت [۲۲]. مطالعاتی که نیتا و همکاران انجام دادند، تخمین‌های تحلیلی برای امید ریاضی و واریانس تخمین‌زننده کشیدگی طیفی در حالات سیگنال‌های گذرای هم‌دوس و گوسین که با پس‌زمینه گوسین شبه‌ایستایی مخلوط شده‌اند، به دست آورده است. این تخمین‌ها برای ارزیابی عملی نسبت سیگنال به نویز و چرخه کاری نسبت به زمان ادغام ابزاری مناسب هستند. برای تأیید این تخمین‌های تحلیلی، از شبیه‌سازی‌های عددی استفاده شده و نشان داده شده است که این برآوردها تحت تأثیر عدم قطعیت‌های آماری قرار دارند که با انتخاب مناسب زمان ادغام می‌توانند از چند درصد تجاوز نکنند. [۲۳]. در این پژوهش، رویکردی نوین برای تحلیل دینامیکی تیر دوسر آزاد آلومینیومی ارائه شده که در مقایسه با مطالعات پیشین، نوآوری‌های چشمگیری دارد. برخلاف پژوهش‌های متداول که عموماً به یک روش تحلیلی اکتفا می‌کنند، این مطالعه از تلفیق هوشمندانه با استفاده از رویکرد سه‌وجهی حل مسئله آزمایش چکش مودال شش نقطه‌ای، تحلیل تابع پاسخ فرکانسی در نرم‌افزار تحلیلگر STAR، صحت‌سنجی با الگوریتم سیرکل فیت متلب و حل عددی در نرم‌افزار آباکوس بهره می‌برد. نقطه تمایز اصلی این پژوهش، کاربرد هم‌زمان تبدیل فوریه زمان-کوتاه و تبدیل موجک در روش کشیدگی طیفی برای تحلیل سیگنال‌های اتفاقی است، درحالی‌که مطالعات قبلی عمدتاً از یک روش منفرد برای سیگنال‌های قطعی

$$H(x, x_0, \omega) = \sum \frac{(\varphi_n(x) \times \varphi_n(x_0))}{m \times (\omega_n^2 - \omega^2) + (j \times \zeta \times \omega_n^2)} \quad (11)$$

که در آن $H(x, x_0, \omega)$ تابع پاسخ فرکانسی سیستم، $\varphi_n(x, x_0)$ شکل مود ساختار در نقاط x و x_0 ، ω_n^2 فرکانس طبیعی سیستم، ω^2 فرکانس تحریک، ζ ضریب میرایی و m جرم تیر می‌باشد. یکی از روش‌های تحلیل مودالی روش circle fitting می‌باشد که در آن نمودار نایکوئیست تابع پاسخ فرکانسی در نزدیکی هر فرکانس طبیعی به صورت یک دایره تقریب زده می‌شود که معادله کلی آن به صورت عبارت (۱۲) آورده شده است.

$$= R^2(\operatorname{Re}(\alpha\omega) - a)^2 + (\operatorname{Im}(\alpha\omega) - b)^2 \quad (12)$$

جایی که (a, b) مرکز دایره و R شعاع دایره می‌باشد. به صورت کلی پاسخ تیر به تحریک چکش در حوزه فرکانس به صورت عبارت (۱۳) بیان می‌شود که در آن $H(x, x_0, \omega)$ تابع پاسخ فرکانسی سیستم و $F\omega$ تبدیل فوریه نیروی تحریک می‌باشد.

$$w(x, \omega) = H(x, x_0, \omega) \times F\omega \quad (13)$$

معادله (۱۴) تابع وزنی، برای گره‌های مختلف تحریک چکش را نشان می‌دهد.

$$g(x, t) = \left(\frac{1}{m}\right) \times \sum \varphi_n(x) \times \sin(\omega_n t) \quad (14)$$

برای مقایسه شکل مودهای تجربی و عددی از معادله MAC که به شرح عبارت (۱۵) است استفاده می‌شود [۷].

$$MAC(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{(\varphi_i^T \times \varphi_j)^2}{(\varphi_i^T \times \varphi_i) \times (\varphi_j^T \times \varphi_j)} \quad (15)$$

شکل ۱، طرح نمادین گرافیکی از طرح مسئله برای انجام آزمایش آنالیز مودال تیر آلومینیومی را نشان می‌دهد. جایی که تیر تحت شرایط مرزی دوسر آزاد و تحت تحریک ضربه پالس چکش در ۶ گره بر روی تیر تحریک شده و سیگنال ناشی از تحریک توسط ساختار ثبت می‌شود.

برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر از معادله (۳)، استفاده می‌شود که در آن EI سفتی خمشی تیر، m جرم تیر، L طول تیر، β_n ضریب مقادیر ویژه تیر می‌باشد که برای تیرهایی با شرایط مرزی مختلف مقادیر متفاوتی می‌باشد [۱].

$$f_n = \frac{\beta_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{ML^4}} \quad (3)$$

معادله دیفرانسیل (۴) مقادیر ویژه β_n را با توجه به بسط مثلثاتی تعریف می‌کند که از روش عددی نیوتون رافسون به دست آمده است [۲].

$$\cosh(\beta_n) - \cos\beta_n \quad (4)$$

معادله شکل مودها برای یک تیر دوسر آزاد به صورت معادله (۵) می‌باشد که در آن $\varphi_n(x)$ شکل مود n ام سیستم در نقطه x ، β_n مقادیر ویژه معادله مشخصه برای شماره شکل مود، L طول تیر و σ_n ضریب ثابت شکل مود است [۲].

$$\sigma_n \varphi_n(x) = \cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L} - \left(\sinh \frac{\beta_n x}{L} - \sin \frac{\beta_n x}{L} \right) \quad (5)$$

ضریب ثابت σ_n طبق معادله (۶) محاسبه می‌شود.

$$\sigma_n = \frac{\cosh(\beta_n) - \cos\beta_n}{\cosh(\beta_n) - \cos\beta_n} \quad (6)$$

از آنجا که شرایط مرزی تیر به صورت دوسر آزاد است، گشتاور و نیروی برشی در دوسر تیر معادل صفر می‌باشد که شرایط مرزی تیر طبق معادلات (۷-۱۰) به دست می‌آید [۲].

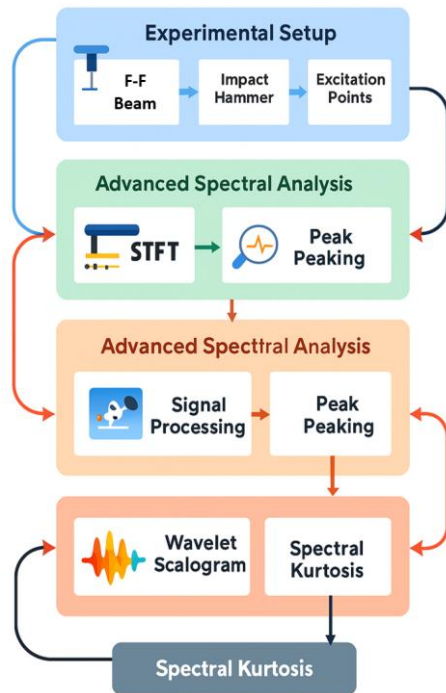
$$-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0) = 0 \quad (7)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0) = 0 \quad (8)$$

$$-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L) = 0 \quad (9)$$

$$EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L) = 0 \quad (10)$$

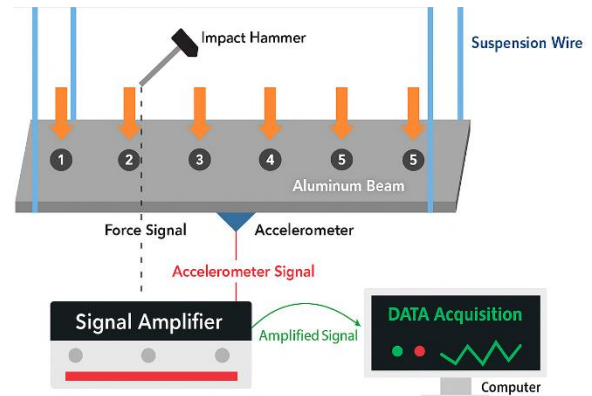
در حالت تحریک چکش، پاسخ دینامیکی تیر در نقطه x به صورت معادله (۱۱)، به تحریک اعمال شده در نقطه x_0 است [۲].



شکل ۲: نمودار فرایند روش پژوهش، از طراحی چیدمان تا تحلیل سیگنال خروجی

۳- آزمایش تجربی

در این پژوهش، چیدمان آزمایشگاهی تحلیل مودال شامل یک تیر آلومینیومی با شرایط مرزی دو سر آزاد بوده که به صورت افقی توسط سیم‌های نازک از شش نقطه استراتژییک معلق شده است. این نحوه آویز باعث می‌شود تیر بدون هیچ گونه اتصال فیزیکی محدودکننده، در شرایط نزدیک به آزاد قرار گیرد و ارتعاشات طبیعی آن با حداقل اختلال اندازه‌گیری شود. برای تحریک سازه، از یک چکش ضربه مدل PCB 0803 با سر نوک متوسط استفاده شده که مجهز به یک حسگر پیزوالکتریک برای اندازه‌گیری هم‌زمان نیروی اعمالی است. ضربات در شش نقطه علامت‌گذاری شده روی تیر آلومینیومی اعمال می‌شود تا امکان شناسایی تمامی مودهای ارتعاشی در محدوده فرکانسی موردنظر فراهم گردد. برای اندازه‌گیری پاسخ، یک شتاب‌سنج تک‌محوره مدل PCB 352C22 با حساسیت ۱۰ میلی‌ولت در مرکز سطح زیرین تیر نصب شده است. همچنین یک میکروفون دقیق پلاریزه شده مدل PCB 378B02 برای ثبت پاسخ صوتی سازه در فاصله مشخص از تیر قرار گرفته است. سیگنال‌های دریافتی از حسگرها توسط یک تقویت‌کننده سیگنال مدل PCB 480E09 تقویت شده و سپس به سیستم جمع‌آوری داده چهار کاناله مدل NI 9234 با دقت نمونه‌برداری ۲۴ بیت و فرکانس نمونه‌برداری ۲۵/۶ کیلوهرتز منتقل می‌شوند. داده‌های جمع‌آوری شده در محیط نرم‌افزار تحلیل مودال



شکل ۱: طرح نمادین گرافیکی از طرح مسئله تیر، تحت اثر تحریک هیجانی برای کشیدگی طیفی گشتاورهای طیفی به صورت معادله (۱۶) می‌باشد. جایی که $S_4(f)$ گشتاور مرتبه چهارم و $S_2(f)$ گشتاور مرتبه دوم طیف در فرکانس f می‌باشد [۲۲].

$$SK(f) = \frac{S_4(f)}{S_2^2(f)} - 2 \quad (16)$$

این روش به‌ویژه برای سیگنال‌های غیرایستا مفید است چون می‌تواند تغییرات ناگهانی در طیف را آشکار کند. روش تبدیل فوریه زمان-کوتاه برای محاسبه کشیدگی طیفی، سیگنال را به بخش‌های کوچک با استفاده از یک تابع پنجره تقسیم می‌کند. سپس برای هر بخش، تبدیل فوریه محاسبه می‌شود تا تغییرات فرکانسی در طول زمان آشکار شود. برای یک سیگنال $x(t)$ ، تبدیل فوریه زمان-کوتاه به صورت معادله (۱۷) تعریف می‌شود [۲۴].

$$STFT(\tau, f) = \int x(t) \cdot w(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (17)$$

که در آن $W(t)$ تابع پنجره است. به صورت کلی تبدیل موجک با استفاده از تابع W_ψ در معادله (۱۸) تعریف می‌شود که نشانگر تابع تبدیل پیوسته است [۲۴].

$$W_\psi(f, a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (18)$$

که در آن $\psi_x(t)$ تحلیل موجک سیگنال در $x(t)$ ، a مقیاس و b جابجایی است. به صورت کلی، تحلیل موجک می‌تواند به تحلیل هم‌زمان زمان و فرکانس پرداخته و به شناسایی ویژگی‌های پیچیده، نوسانات و ناهنجاری‌ها در سیگنال‌های غیرخطی و در نتیجه کاهش نویز کمک می‌کند. شکل ۲، روند نمای کلی تحلیل سیگنال تابع پاسخ فرکانسی ناشی از آزمایش آزمایشگاهی تا بررسی کشیدگی طیفی سیگنال به روش‌های مختلف را نشان می‌دهد.

برای کاهش نشت طیفی، پنجره هیننگ به سیگنال نیرو و پنجره نمایی به سیگنال پاسخ اعمال شده است. این چیدمان آزمایشگاهی امکان شناسایی دقیق خواص دینامیکی تیر را با حداقل خطا فراهم می‌کند که می‌تواند برای اعتبارسنجی مدل‌های المان محدود و پیش‌بینی رفتار سازه‌های مشابه مورد استفاده قرار گیرد. شکل ۳، چیدمان اصلی آزمایش تجربی به همراه تجهیزات را نشان می‌دهد.

STAR پردازش می‌شوند، به طوری که با استفاده از تبدیل فوریه سریع، توابع پاسخ فرکانسی (FRF) محاسبه شده و با استفاده از الگوریتم‌های شناسایی مودال مانند POLY MAX پارامترهای مودال شامل فرکانس‌های طبیعی، نسبت‌های میرایی و شکل‌های مودال استخراج می‌گردند. برای افزایش دقت، هر آزمایش سه بار و با تعداد گره‌های متفاوت تکرار شده و میانگین نتایج مورد استفاده در نزدیک‌ترین حالت به نتایج حل عددی و تحلیلی قرار گرفته است. در پردازش سیگنال،



شکل ۳: (a) چیدمان آزمایش برای تیر دوسر آزاد، (b) تحریک تیر در شش گره متوالی، (c) اندازه‌گیری پاسخ با دستگاه تحلیل گرد شبکه

$\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ تعریف گردید. هندسه تیر به صورت یک بخش سه‌بعدی (3D Part) در مازول Part با استفاده از ابزار Extrude مدل‌سازی شد. برای مش‌بندی از المان‌های مکعبی خطی C3D8R با کنترل کیفیت aspect ratio کمتر از ۳ استفاده شد. تراکم مش در جهت طولی ۵۰ المان و در جهت‌های عرضی و ضخامت به ترتیب ۱۰ و ۵ المان تعیین شد که در مجموع ۲۵۰۰ المان با خطای همگرایی کمتر از ۰/۱۵٪ و تحلیل حساسیت ۵٪ در پارامترهای فیزیکی ساختار

۴- شبیه‌سازی و حل عددی

تحلیل فرکانس طبیعی تیر آلومینیومی دوسر آزاد در آباکوس از طریق روش اجزای محدود و حل مسئله مقادیر ویژه انجام می‌شود. مدل یک تیر آلومینیومی دو سر آزاد با ابعاد $(54 \times 4.5 \times 0.5)$ سانتی‌متر در محیط آباکوس CAE ایجاد شد. خصوصیات مادی آلومینیوم شامل مدول الاستیسیته $E=70 \text{ GPa}$ ، ضریب پواسون $\nu=0.33$ و چگالی

۶- نتایج و بحث (بخش اول: آنالیز مودال)

در این بخش نتایج حل تحلیلی، تجربی و عددی سیستم به صورت جداگانه به گونه‌ای بررسی شده است که نتایج آزمایش تجربی به صورت توابع پاسخ فرکانسی و شکل مودها در نرم‌افزار استار نمایش داده شده و در انتها صحت‌سنجی و مقایسه فرکانس‌ها و شکل مودهای ساختار تحریک شده در تمامی روش‌های حل، آورده شده است.

۶-۱- نتایج فرکانس طبیعی حاصل از حل تحلیلی

جدول ۱، نتایج حاصل از حل تحلیلی سیستم را با توجه به تعداد گره‌های مورد بررسی نشان می‌دهد. به صورت کلی با افزایش تعداد نقاط تحریک و β_n ، مقادیر فرکانس‌های طبیعی بیش‌تر می‌شود. از آن‌جا که در فرکانس‌های پایین‌تر حساسیت ارتعاشی سیستم بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرد، کم‌ترین فرکانس سیستم در گره اول به میزان ۸۹/۹ هرتز و بالاترین فرکانس سیستم در گره ششم به مقدار قابل توجه ۱۶۷۷/۲ هرتز تغییر پیدا کرده است. علاوه بر حل تحلیلی به صورت دستی، حل تحلیلی به وسیله روش circle fitting در نرم‌افزار متلب انجام شد. شکل مودهای حاصله از حل تحلیلی نشان می‌دهد که با افزایش فرکانس طبیعی، نوسانات پیچیده‌تری با توجه به تحریک وارده بر سیستم مشاهده شده و به صورت سینوسی امتداد می‌یابد

جدول ۱: فرکانس‌های طبیعی در شش گره برای حل تحلیلی

فرکانس طبیعی (هرتز)	β_n	مود n ام
۸۹/۹	۴/۷۳	۱
۲۴۷/۶	۷/۸۵	۲
۴۸۵/۲	۱۱/۰۰	۳
۸۰۲/۶	۱۴/۱۴	۴
۱۲۰۰/۰	۱۷/۲۹	۵
۱۶۷۷/۲	۲۰/۴۲	۶

۶-۲- نتایج فرکانس طبیعی حاصل از Circle Fitting

از آن‌جا که روش Circle Fitting تجمع فرکانس‌های طبیعی را با توجه به بیش‌ترین مقدار $\frac{d\omega}{d\theta}$ نشان می‌دهد، از روش حداقل مربعات برای تعیین پارامترهای دایره استفاده شده است. نتایج حاصل از این روش داده‌های تصادفی فرکانس‌های طبیعی را بر روی یک دایره با نویز گوسی ۰/۱ تولید کرده، همچنین خطای RMS را به میزان ۰/۱۱۹۸۷ نشان می‌دهد. نکته قابل توجه این است که برای فرکانس دوم،

ایجاد نمود. در ماژول Step، یک مرحله تحلیل Frequency با استخراج ۱۲ فرکانس اول (۶ فرکانس صلب + ۶ فرکانس انعطافی) تعریف شد. پارامترهای حل‌گر شامل Lanczos eigensolver با تنظیم Normalize مود شکل‌ها روی Mass matrix انتخاب گردید.

۵- تخمین کشیدگی طیفی با روش تبدیل موجک و

تبدیل فوریه زمان-کوتاه

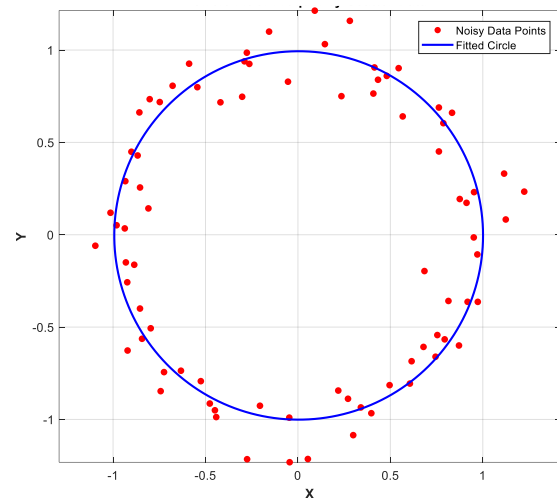
پس از استخراج فرکانس‌های طبیعی یک تیر آلومینیومی دو سر آزاد تحت تحریک ضربه‌ای چکش، برای تخمین کشیدگی طیفی تابع پاسخ فرکانسی به دست آمده از آزمایش تجربی، از ترکیب روش تبدیل موجک و تبدیل فوریه زمان کوتاه، در محیط نرم‌افزار متلب استفاده شد. سیگنال پاسخ فرکانسی با فرکانس نمونه برداری $f_s=4000$ Hz و مدت زمان مشخص ثبت گردید. الگوریتم Fast Kurtogram با استفاده از تجزیه چندمقیاسه موجک در سطوح مختلف (nlevel) پیاده‌سازی شد که هر سطح دارای پهنای باند $bw=fs/2^{(level+1)}$ است. برای هر باند فرکانسی فیلتر $butter(6,[f_low,f_high]/(fs/2),'bandpass')$ طراحی و سیگنال فیلتر شده $x_filtered=filter(b,a,x)$ محاسبه گردید. پوش سیگنال از طریق تبدیل هیلبرت $x_envelope=abs(hilbert(x_filtered))$ استخراج و سپس به پنجره‌هایی با طول $window_size=round(fs/20)$ تقسیم شد. کشیدگی محلی برای هر پنجره با فرمول $kurt=(mean(((segment-\mu)/\sigma)^4)-3)$ محاسبه شده و ۹۰ امین صدک این مقادیر به عنوان شاخص کشیدگی هر باند انتخاب گردید. برای تقویت دقت تشخیص فرکانس‌های رزونانس، ضرایب تقویت متناسب با ارتفاع و پهنای پیک‌ها در نقاط مشخص طیف اعمال شد. نتایج حاصل از Fast Kurtogram نشان می‌دهد که حداکثر مقادیر کشیدگی در فرکانس‌های رزونانس اتفاق می‌افتد که با مقادیر تئوری فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر آزاد $f_n=(\lambda n^2/2\pi)\sqrt{(EI/\rho AL^4)}$ مطابقت دارد. میانگین کشیدگی محاسبه شده برای کل طیف نشان دهنده حضور قوی رزونانس‌ها در سیگنال است. مقایسه نتایج با روش‌های کلاسیک FFT نشان می‌دهد که کشیدگی طیفی قابلیت بهتری در شناسایی مودهای ضعیف و تفکیک فرکانس‌های نزدیک دارد. این روش به دلیل حساسیت بالا نسبت به تغییرات ناگهانی در سیگنال، برای تشخیص آسیب‌های محلی و تحلیل رفتار دینامیکی سازه‌ها مناسب است و امکان استخراج دقیق فرکانس‌های طبیعی از سیگنال‌های آلوده به نویز را فراهم می‌کند.

سیستم‌اند، در حالی که مودهای پنجم و ششم در ۱۳۰۷ و ۱۷۱۲/۷ هرتز بیشترین نقش را در پاسخ سیستم دارند و مود ششم با دامنه بالا و پهنای باند وسیع، نشان‌دهنده یک ناحیه تشدید قوی در فرکانس‌های بالا است. آنتی‌رزونانس‌ها در فرکانس‌های ۱۷۰، ۳۶۰، ۶۵۰، ۱۱۰۰ و ۱۵۲۰ هرتز ناشی از تداخل مودهای مختلف باعث کاهش بازتاب سیستم می‌شوند و عمق و پهنای آن‌ها اطلاعات مهمی درباره‌ی نحوه‌ی توزیع انرژی و قدرت کوپلینگ بین مودها ارائه می‌کند. دامنه‌ی این آنتی‌رزونانس‌ها با افزایش فرکانس کاهش‌یافته و نشان‌دهنده‌ی افت انرژی در مودهای بالاتر است که به دلیل اثرات میرایی سازه‌ای و اصطکاک داخلی رخ می‌دهد. همچنین، تغییرات فاز در این نواحی، رفتار غیرخطی و اندرکنش ضعیف بین مودهای مجاور را تأیید می‌کند. تحلیل baseline متغیر نیز نشان داد که رفتار کلی سیستم با فرکانس غیرخطی است که احتمالاً ناشی از میرایی فرکانسی، غیرخطی بودن مواد سازنده، اثرات دمایی و نویز محیطی است، هرچند مودهای اصلی همچنان قابل تشخیص‌اند. نسبت Q-factor برای مودهای مختلف متفاوت بوده و نشان‌دهنده‌ی خصوصیات میرایی سیستم است؛ مودهای با Q-factor بالا میرایی کم و پایداری بالا و مودهای با Q-factor پایین میرایی بیشتر و واکنش سریع‌تر به تغییرات ورودی را نشان می‌دهند، درحالی‌که سطح نویز موجود در حدود ۲۵ درصد، صحت نتایج مودال و قابلیت استخراج پارامترها با دقت مناسب را تأیید می‌کند.

جدول ۲: فرکانس‌های طبیعی به‌دست‌آمده از روش تجربی در Star

مود n ام	میرایی (هرتز)	فرکانس طبیعی (هرتز)
۱	۱/۳۳	۹۳/۲
۲	۱/۱۴	۲۵۴/۸
۳	۱/۲۶	۴۷۴/۱
۴	۱/۱۱	۸۳۵/۹
۵	۱/۰۸	۱۳۰۷
۶	۱/۰۲	۱۷۱۲/۷

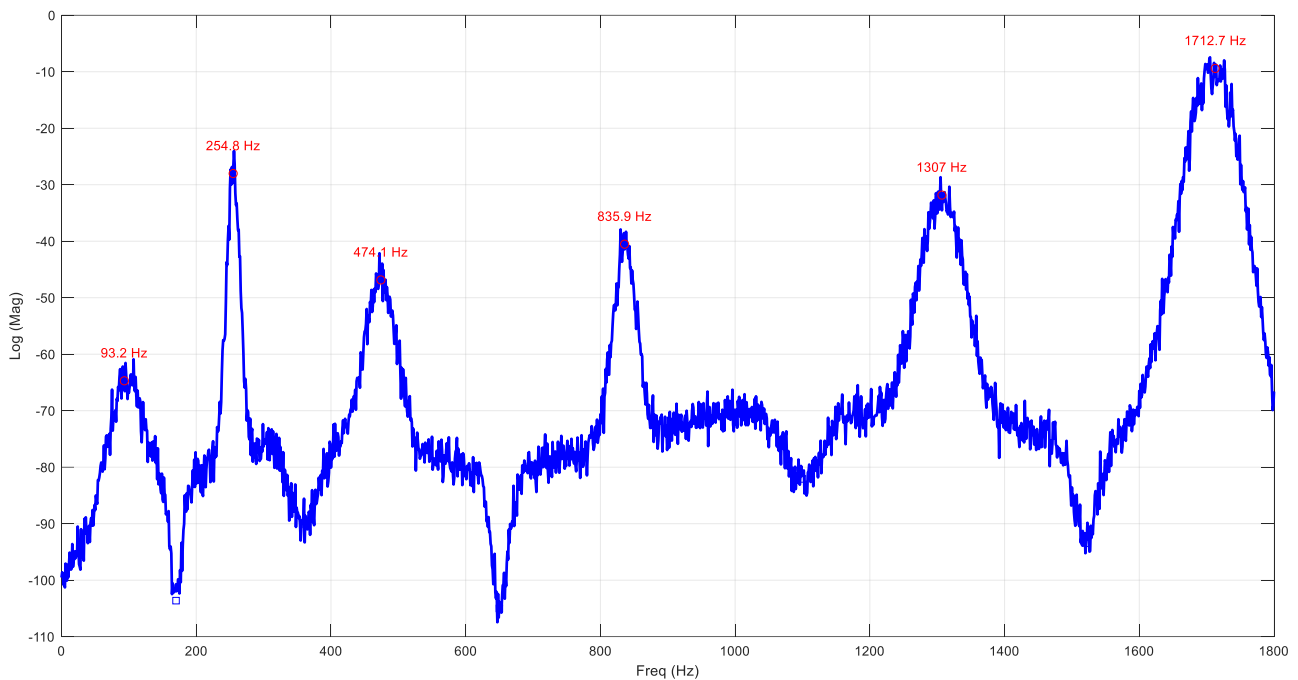
بیش‌ترین رسپتانس با مقدار ۰/۸۶ به ثبت رسیده‌است. شکل ۴، نمودار پراکندگی تصادفی فرکانس‌های طبیعی را نشان می‌دهد که بیان می‌کند، دایره فیت شده با نقاط نویزی قرمز رنگ مطابقت دارد.



شکل ۴: پراکندگی داده‌های فرکانس طبیعی اطراف دایره

۳-۶- نتایج FRF حاصل از روش تجربی

داده‌های حاصل از آزمایش تجربی در نرم‌افزار STAR وارد و تحلیل شد و فرکانس‌های طبیعی و ضرایب میرایی سیستم مطابق جدول ۲ و شکل ۵ استخراج گردید. تحلیل تابع پاسخ فرکانسی نشان داد که سیستم دارای شش مود رزونانسی اصلی در فرکانس‌های ۹۳/۲، ۲۵۴/۸، ۴۷۴/۱، ۸۳۵/۹، ۱۳۰۷ و ۱۷۱۲/۷ هرتز است که الگوی پیچیده‌ای از رفتار دینامیکی را تشکیل می‌دهند و توزیع نامنظم مودها نشان‌دهنده تأثیر متغیرهایی چون جرم، سختی و میرایی در بخش‌های مختلف سیستم است. مود اول در ۹۳/۲ هرتز با پهنای باند وسیع و Q-factor پایین، بیانگر رفتار پایه‌ای سیستم و میرایی قابل توجه ناشی از تلفات ویسکوز یا اصطکاک داخلی است، در حالی که مود دوم در ۲۵۴/۸ هرتز با پهنای باند کمتر و دامنه بالاتر، رزونانسی تیز و با کیفیت بالا را نشان می‌دهد که معمولاً با مودهای خمشی یا پیچشی مرتبط است. مودهای میانی در ۴۷۴/۱ و ۸۳۵/۹ هرتز دارای پهنای باند و دامنه متعادل بوده و بیانگر تعادل انرژی ذخیره‌شده و تلف‌شده در



شکل ۵: نمودار تابع پاسخ فرکانسی سیستم تحت تحریک در نرم‌افزار استار

۶-۴- نتایج تحلیل تابع همبستگی

تابع همبستگی محاسبه‌شده نشان‌دهنده کیفیت ارتباط خطی بین سیگنال ورودی و خروجی سیستم در طیف فرکانسی مورد بررسی است. نتایج نشان می‌دهد که همبستگی در فرکانس‌های رزونانسی به‌طور قابل‌توجهی بالاتر از سایر نواحی است. بیش‌ترین مقدار همبستگی در فرکانس ۱۷۱۲/۷ هرتز مشاهده می‌شود که با قوی‌ترین مود رزونانسی همخوانی دارد و این موضوع نشان‌دهنده غالب بودن این مود در پاسخ کلی سیستم است. همبستگی بالا در این فرکانس بیانگر پایداری و تکرارپذیری بالای اندازه‌گیری در این ناحیه است که برای تحلیل‌های دقیق مودال ضروری محسوب می‌شود. در نقاط آنتی‌رزونانس، همبستگی به‌طور محسوسی کاهش می‌یابد که بیانگر تضعیف رابطه خطی ورودی-خروجی در این نواحی است. این کاهش همبستگی می‌تواند ناشی از تأثیر نویز محیطی، عدم خطی‌های سیستم، یا تداخل مودهای نزدیک به هم باشد. در این نواحی، دقت تحلیل مودال کاهش می‌یابد و نیاز به روش‌های تحلیل پیشرفته‌تر برای استخراج پارامترهای مودال وجود دارد. مقدار متوسط همبستگی در حدود ۰/۷۵ قرار دارد که نشان‌دهنده کیفیت مناسب اندازه‌گیری است و در محدوده قابل قبول برای تحلیل‌های مهندسی قرار دارد. این مقدار نشان می‌دهد که عمده انرژی سیگنال خروجی از سیگنال ورودی ناشی می‌شود و تأثیر عوامل خارجی نظیر نویز محیطی، ارتعاشات نامطلوب، یا سایر منابع اختلال در حد قابل کنترل است. تحلیل آماری نشان

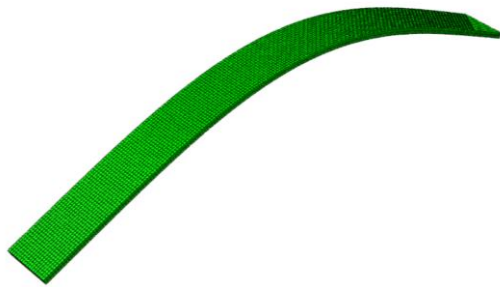
می‌دهد که حدود ۶۰-۷۰ درصد از طیف فرکانسی دارای همبستگی بالاتر از ۰/۸ است که برای تحلیل‌های مودال قابل قبول محسوب می‌شود. این درصد بالا نشان‌دهنده کیفیت مناسب تجهیزات اندازه‌گیری و شرایط آزمایش است. نواحی با همبستگی پایین‌تر معمولاً در فرکانس‌های آنتی‌رزونانس و یا در نواحی با سطح سیگنال پایین قرار دارند. کاهش همبستگی در فرکانس‌های بالا (بالای ۱۶۰۰ هرتز) ممکن است ناشی از تأثیر نویز و یا محدودیت‌های سیستم اندازه‌گیری باشد. این کاهش می‌تواند به دلیل کاهش نسبت سیگنال به نویز در فرکانس‌های بالا، محدودیت‌های پهنای باند تجهیزات، یا تأثیر مودهای فرکانس بالا که در مدل‌سازی در نظر گرفته نشده‌اند، باشد.

۶-۵- نتایج حل عددی المان محدود

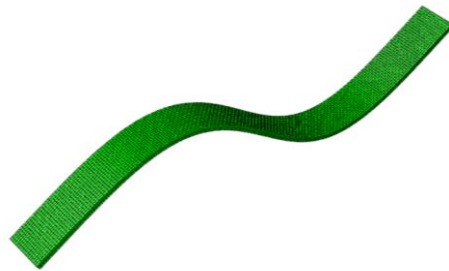
نتایج حاصل از تحلیل عددی نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی شش مود اول عبارت‌اند از: ۸۹/۷، ۲۴۷/۵۱، ۴۸۵/۴۹، ۸۰۳/۰۳، ۱۲۰۰/۲ و ۱۶۷۶/۸ هرتز. این مقادیر با رفتار مشخصه تیرهای دو سر آزاد مطابقت دارد، جایی که دو مود اول معمولاً فرکانس‌های نسبتاً پایین‌تری نسبت به حالات مقید دارند. تحلیل نسبت‌های فرکانسی نشان می‌دهد که $f_2/f_1 = 2.76$ ، $f_3/f_1 = 5.41$ ، $f_4/f_1 = 8.95$ ، $f_5/f_1 = 13.38$ و $f_6/f_1 = 18.69$ است. این نسبت‌ها با نظریه کلاسیک تیر اویلر-برنولی برای شرایط مرزی آزاد مطابقت دارد، جایی که فرکانس‌های مودال متناسب با مربع عدد موج (β_n^2) تغییر می‌کنند. افزایش غیرخطی فرکانس‌ها نشان‌دهنده تأثیر اینرسی چرخشی و

ارتعاشی به‌وضوح قابل تشخیص باشند. ضریب مشارکت مودی، برای مودهای فرد معمولاً بیشتر از مودهای زوج است که این امر ناشی از تقارن شکل مودها نسبت به مرکز تیر می‌باشد. بررسی توزیع تنش در طول تیر نشان می‌دهد که حداکثر تنش خمشی در مودهای اول و سوم در مرکز تیر رخ می‌دهد، در حالی که در مودهای دوم و چهارم، نقاط تنش ماکزیمم در فواصل مختلف از مرکز قرار دارند. تحلیل حساسیت نشان می‌دهد که تغییرات ۱٪ در مدول الاستیسیته باعث تغییر ۰/۵٪ در فرکانس‌های طبیعی می‌شود، در حالی که تغییرات چگالی تأثیر معکوس و متناسب با جذر آن دارد. مقایسه با معادلات تحلیلی نشان می‌دهد که نتایج عددی با انتظارات تئوری مطابقت دارد. برای تیر آلومینیومی با مدول الاستیسیته ۷۰GPa، چگالی ۲۷۰۰kg/m³ و با فرض ابعاد متعارف، فرکانس‌های به‌دست‌آمده منطقی به نظر می‌رسند. عدم وجود فرکانس‌های صفر یا منفی تأیید می‌کند که مدل به‌درستی تعریف شده است.

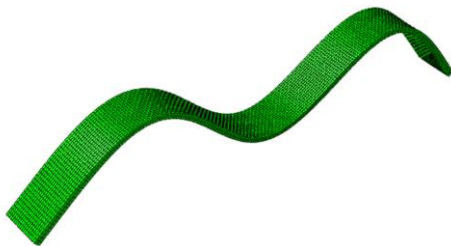
تنش‌های برشی در مودهای بالاتر است. بررسی شکل مودهای ارائه شده نشان می‌دهد که مود اول دارای یک نصف موج با حداکثر دامنه در مرکز تیر است. مود دوم نیز یک نصف موج اما در جهت عمود بر مود اول (پیچش یا خمش در صفحه دیگر) ظاهر می‌شود. مودهای سوم و چهارم شکل‌های پیچیده‌تری با نقاط گره بیشتر نشان می‌دهند. مودهای پنجم و ششم دارای تعداد بیشتری نقطه گره هستند که نشان‌دهنده افزایش پیچیدگی شکل موج در فرکانس‌های بالاتر است. مقایسه با معادلات تحلیلی نشان می‌دهد که نتایج عددی با انتظارات تئوری مطابقت دارد. برای تیر آلومینیومی با مدول الاستیسیته ۷۰GPa، چگالی ۲۷۰۰kg/m³ و با فرض ابعاد متعارف، فرکانس‌های به‌دست‌آمده منطقی به نظر می‌رسند. عدم وجود فرکانس‌های صفر یا منفی تأیید می‌کند که مدل به‌درستی تعریف شده است. رفتار دینامیکی مناسبی از خود نشان می‌دهد. ضریب میرایی نسبتاً کم این ماده باعث می‌شود که مودهای



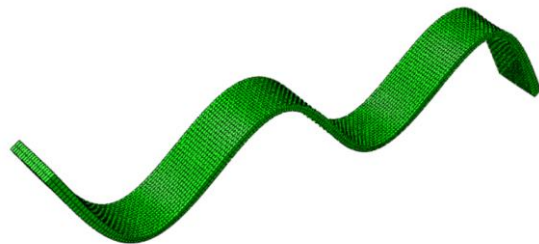
مود اول در فرکانس ۸۹/۷ هرتز



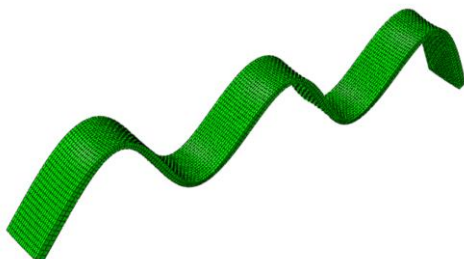
مود دوم در فرکانس ۲۴۷/۵ هرتز



مود سوم در فرکانس ۴۸۵/۴ هرتز



مود چهارم در فرکانس ۸۰۳ هرتز



مود پنجم در فرکانس ۱۲۰۰/۲ هرتز



مود ششم در فرکانس ۱۶۷۶/۸ هرتز

شکل ۶: نتایج عددی شکل مودهای خمشی تیر در شش فرکانس مختلف

۶-۶- صحت سنجی نتایج فرکانس طبیعی سیستم

در این مقاله سعی بر این شده تا پارامترهای دینامیکی نتایج آزمایش مودال یک تیر آلومینیومی تحریک شده با ضربه در شش گره مختلف، استخراج شده و نتایج حاصل از روش های حل متفاوت با یکدیگر مقایسه و صحت سنجی شود. نتایج بیانگر آن است که با افزایش شماره مود فرکانس های طبیعی سیستم افزایش یافته و شکل مودهای ارتعاشی حالت پیچیده تری را به خود می گیرند. در این بخش نتایج حاصل از حل عددی، تحلیلی و آزمایش تجربی به گونه ای بیان می شود که اعتبار سنجی فرکانس های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی بین روش های حل مذکور قابل بحث است. جدول ۳، صحت سنجی نتایج فرکانس طبیعی سیستم را با روش حل های مختلف به نمایش می گذارد. نتایج مقایسه فرکانس های طبیعی تیر دوسر آزاد از سه منظر مختلف، تطابق

جدول ۳: صحت سنجی فرکانس های طبیعی به دست آمده از سه روش تحلیلی- عددی- تجربی

مود	تحلیل (Hz)	عددی (Hz)	آزمایشگاهی (Hz)	خطای عددی- تحلیلی (%)	خطای تحلیلی- آزمایشگاهی (%)	خطای عددی- آزمایشگاهی (%)
۱	۸۹/۹	۸۹/۷	۹۳/۲	-۰/۲۲	۳/۶۷	-۳/۶۷
۲	۲۴۷/۶	۲۴۷/۵	۲۵۴/۸	-۰/۰۴	۲/۹۱	-۲/۸۶
۳	۴۸۵/۲	۴۸۵/۴	۴۷۴/۱	-۰/۰۴	-۲/۲۹	۲/۳۸
۴	۸۰۲/۶	۸۰۳/۰	۸۳۵/۹	۰/۰۵	۴/۱۵	۴/۰۹
۵	۱۲۰۰/۰	۱۲۰۰/۰	۱۳۰۷/۰	۰/۰۰	۸/۹۲	۸/۹۲
۶	۱۶۷۷/۲	۱۶۷۶/۸	۱۷۱۲/۷	-۰/۰۲	۲/۱۲	۲/۱۴

۶-۷- صحت سنجی نتایج با استفاده از معیار مودال اطمینان (MAC)

معیار اطمینان مودال (Modal Assurance Criterion) یکی از مهم ترین ابزارهای تطبیق مودال در تحلیل دینامیکی سازه ها است که همراه است، به طوری که مودهای اول و دوم انحراف مثبت (۳/۶۷٪ و ۲/۹۱٪) و مود سوم انحراف منفی (۲/۲۹٪) نشان می دهند.

این روند نشان دهنده اثرات سیستماتیک است که احتمالاً به دلیل اختلاف خصوصیات مواد واقعی با مقادیر فرضی (مدول یانگ، چگالی، ضریب پواسون) یا عدم تحقق کامل شرایط مرزی آزاد ایده آل در آزمایش تجربی است. مود چهارم و پنجم با خطاهای ۴/۱۵٪ و ۸/۹۲٪ نشان می دهند که در فرکانس های بالاتر اثرات میرایی ویسکوالاستیک، coupling با مودهای محلی و تأثیر شرایط محیطی (دما، رطوبت) بر خصوصیات مواد بیشتر می شود. افزایش خطا با فرکانس (به جز مود ششم) نشان دهنده محدودیت های مدل سازی کلاسیک تیر اولر-برنولی در پیش بینی رفتار دینامیکی فرکانس های بالا است که در آن اثرات

استثنایی بین روش های عددی و تحلیلی را نشان می دهد که خطای حداکثر ۰/۲۲٪ در مود اول دارند. این همگرایی تأیید می کند که مدل سازی عددی با دقت بالا انجام شده و mesh refinement و شرایط مرزی به درستی اعمال شده اند. الگوریتم حل عددی (احتمالاً روش اجزای محدود) با discretization مناسب موفق تقریب دقیق مشتقات مرتبه بالا در معادله تیر اولر-برنولی شده است.

انحراف نتایج آزمایشگاهی از مقادیر تئوری با الگوی مشخص همراه باشد. از نظر validation و verification، نتایج نشان می دهند که کد عددی به درستی اعتبار سنجی شده است (مطابقت با حل تحلیلی) اما validation آن با داده های تجربی نیاز به اعمال correction factors یا مدل سازی دقیق تر محیط آزمایشگاهی دارد.

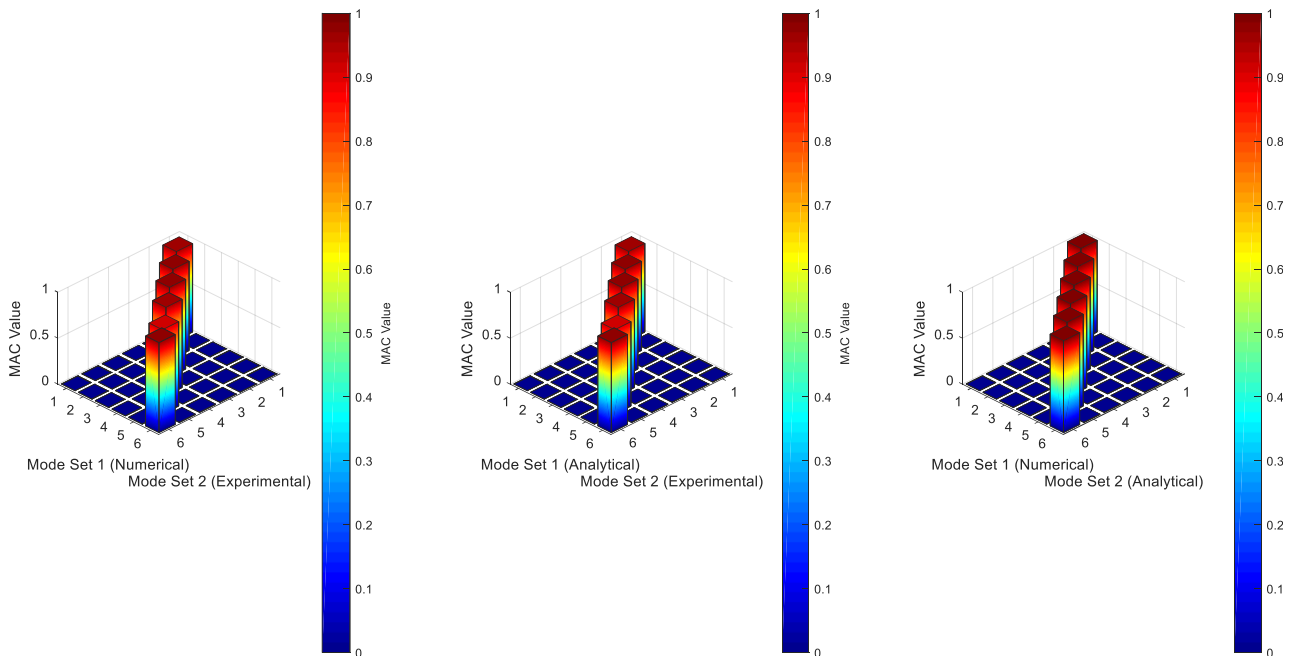
اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی قابل اهمیت می شوند. کاهش ناگهانی خطا در مود ششم (۲/۱۲٪) ممکن است به دلیل تغییر در مکانیزم تحریک یا تشدید در آزمایش و یا تأثیر مودهای غیرخطی باشد. از نظر validation و verification، نتایج نشان می دهند که کد عددی به درستی اعتبار سنجی شده است (مطابقت با حل تحلیلی) اما validation آن با داده های تجربی نیاز به اعمال correction factors یا مدل سازی دقیق تر محیط آزمایشگاهی دارد.

درجه همبستگی بین دو مجموعه شکل مود را کمی سازی می کند. مقادیر معیار مودال اطمینان بین ۰ تا ۱ تغییر می کنند که ۱ نشان دهنده تطابق کامل و ۰ نشان دهنده عدم همبستگی است. شکل ۷، نمودارهای مودال اطمینان را برای سه روش حل به صورت دو به دو نشان می دهد.

در مقایسه نتایج عددی و تجربی، MAC قطری نشان دهنده تطابق مودهای متناظر است. مقادیر MAC قطری برای شش مود اول به

رفتار سازه در فرکانس‌های بالا است. عناصر غیرقطری در این حالت نیز به‌طور متوسط کمتر از ۰/۱۲ هستند که نشان‌دهنده تمایز مناسب بین مودها است. تطابق بالای MAC در مودهای اول تا چهارم (بیشتر از ۰/۹۵) تأیید می‌کند که مدل تئوری به‌خوبی رفتار دینامیکی سازه را در این محدوده فرکانسی پیش‌بینی می‌کند. در حالت عددی-تحلیلی، این حالت بالاترین تطابق را نشان می‌دهد با MAC قطری ۰/۹۹۹۸، ۰/۹۹۹۹، ۰/۹۹۹۶، ۰/۹۹۹۵، ۱/۰۰۰ و ۰/۹۹۹۸. تطابق تقریباً کامل (>۰/۹۹۹) نشان‌دهنده دقت بالای مدل‌سازی عددی نسبت به حل تحلیلی است. عناصر غیرقطری تقریباً صفر (کمتر از ۰/۰۰۲) هستند که نشان‌دهنده عدم وجود هرگونه تداخل عددی یا خطای محاسباتی است.

ترتیب ۰/۹۶۳، ۰/۹۷۱، ۰/۹۷۷، ۰/۹۶۱، ۰/۹۱۸، ۰/۹۷۹ و ۰/۹۷۹ محاسبه شده است. مود پنجم با معیار مودال ۰/۹۱۸ کمترین تطابق را نشان می‌دهد که با خطای ۸/۹۲٪ فرکانسی همخوانی دارد. این کاهش تطابق به دلیل تأثیر میرایی سازه‌ای و اثرات غیرخطی در فرکانس‌های بالاتر است. عناصر غیرقطری نسبتاً پایین (کمتر از ۰/۱۵) بوده که نشان‌دهنده عدم وجود تداخل مودال یا coupling بین مودهای مختلف است. این امر تأیید می‌کند که شناسایی مودال به‌درستی انجام شده و هیچ‌گونه اشتباه در ترتیب مودها وجود ندارد. قطری برای مقایسه تحلیلی-تجربی مقادیر ۰/۹۶۶، ۰/۹۷۱، ۰/۹۷۷، ۰/۹۵۹، ۰/۸۹۲ و ۰/۹۷۹ را نشان می‌دهد. مجدداً مود پنجم با معیار مودال اطمینان ۰/۸۹۲ کمترین تطابق را دارد. این روند کاهش تطابق در مود پنجم نشان‌دهنده محدودیت‌های مدل‌سازی تئوری در پیش‌بینی دقیق



شکل ۷: نمودارهای معیار مودال اطمینان برای سه حالت (تحلیلی-عددی، تحلیلی-تجربی، تجربی-عددی)

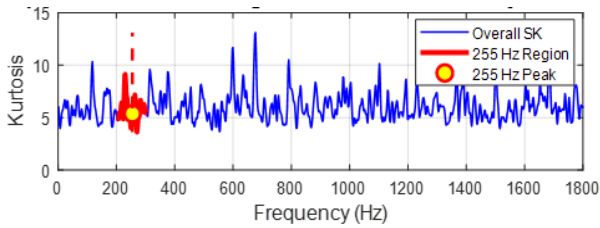
۱۳۰۷ و ۱۷۱۳ هرتز می‌باشد. بررسی توزیع کشیدگی طیفی در سطوح مختلف پهنای باند حاکی از وجود ناهنجاری‌های قابل توجه در مود دوم (۲۵۵ هرتز) است که با مقدار کشیدگی ۷/۵ بالاترین حساسیت را نسبت به عیوب احتمالی از خود نشان می‌دهد. این مود به دلیل داشتن ضریب کیفیت بالا ($Q=25$) و پهنای باند محدود، قابلیت تشخیص تغییرات کوچک در پاسخ دینامیکی سیستم را دارد. مقایسه الگوی کورتوگرام در سطوح مختلف نشان می‌دهد که مودهای ۱۳۰۷ و ۱۷۱۳ هرتز با مقادیر کشیدگی ۶/۰ و ۷/۲ به ترتیب، پهنای باند بیشتر و حساسیت متوسط به عیوب دارند. مود اول (۹۳ هرتز) با کشیدگی ۴/۸ و پهنای باند نسبتاً وسیع، کمترین حساسیت را برای تشخیص

۷- نتایج و بحث (بخش دوم: نتایج تحلیل کشیدگی طیفی برای سیگنال تابع پاسخ فرکانسی)

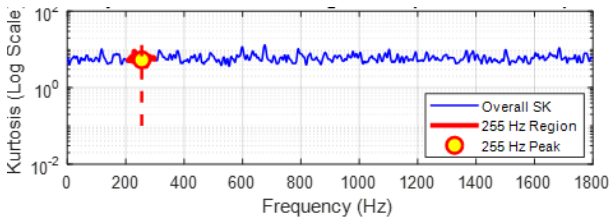
در این بخش نمودارهای استخراج شده از تحلیل کشیدگی طیفی به روش‌های تبدیل فوریه زمان و تبدیل موجک با دستورات کد متلب، برای تابع پاسخ فرکانسی ناشی از آزمایش تجربی در نرم‌افزار استار به‌صورت کامل بررسی می‌شود.

۷-۱- تحلیل نتایج کورتوگرام

نتایج حاصل از کورتوگرام سریع نشان می‌دهد که سیستم دارای شش مود رزونانس مشخص در فرکانس‌های حدودی ۹۳، ۲۵۵، ۴۷۴، ۸۳۶،



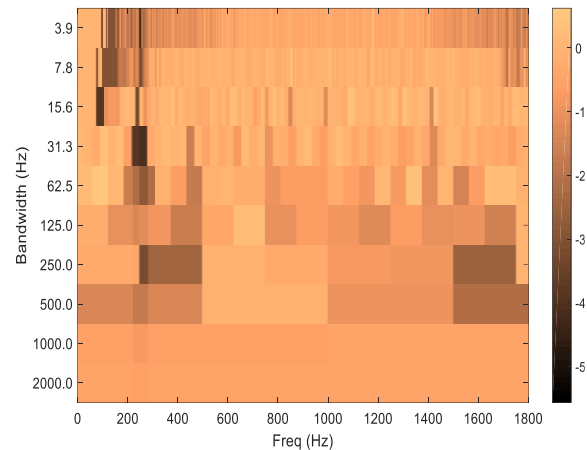
شکل ۹: نمودار کشیدگی طیفی با روش تبدیل فوریه زمان-کوتاه در مقیاس خطی



شکل ۱۰: نمودار کشیدگی طیفی با روش تبدیل فوریه زمان-کوتاه در مقیاس لگاریتمی

نمودار کشیدگی طیفی محاسبه‌شده با تبدیل موجک پیوسته با استفاده از موجک مورلت در شکل ۱۱ ارائه شده است. گراف آبی‌رنگ نشان‌دهنده توزیع کشیدگی در کل محدوده فرکانسی و منحنی قرمز ناحیه مود دوم (± 50 هرتز) را مشخص می‌کند. روش موجک رزولوشن فرکانسی متغیر با خصوصیات multi-resolution ارائه می‌دهد که برای تحلیل سیگنال‌های غیرایستا مناسب است. مقیاس‌های موجک از ۱ تا ۲۵۶ با گام ۲ انتخاب شده که طیف وسیعی از فرکانس‌ها را پوشش می‌دهد. مقادیر کشیدگی طیفی در روش موجک نسبت به تبدیل فوریه زمان-کوتاه تغییرات بیشتری نشان می‌دهد که ناشی از خصوصیات adaptive این روش است. پیک‌های کشیدگی طیفی در فرکانس‌های مختلف مشاهده می‌شود که با موقعیت مودهای تشدید همخوانی دارد. تبدیل scale-to-frequency برای تبدیل مقیاس‌های موجک به فرکانس قابل تفسیر استفاده شده است. این روش قابلیت تشخیص ناهنجاری‌های محلی را با دقت بالا و حساسیت مناسب ارائه می‌دهد. افزون بر این، ناحیه‌های با کشیدگی بالا در اطراف فرکانس‌های طبیعی تیر مشاهده می‌شوند که بیانگر تمرکز انرژی و رفتار غیرخطی موضعی در پاسخ سازه است. تحلیل جزئی‌تر این نواحی نشان می‌دهد که اثرات میرایی و ناهمگنی ماده در ضرایب کشیدگی موجک بازتاب یافته‌اند. در نهایت، این نتایج تأیید می‌کنند که استفاده از موجک مورلت ابزاری توانمند برای آشکارسازی رفتارهای گذرای دینامیکی و تفکیک دقیق مودهای نزدیک به هم است.

ناهنجاری‌ها نشان می‌دهد. توزیع انرژی در کورتوگرام بیانگر آن است که عیوب احتمالی در سیستم بیشتر در محدوده فرکانس‌های بالاتر و با پهنای باند محدودتر قابل تشخیص هستند. نتایج این تحلیل مبین اهمیت نظارت مستمر بر مود ۲۵۵ هرتز به‌عنوان شاخص کلیدی برای تشخیص زود هنگام خرابی در سیستم ارتعاشی مورد مطالعه می‌باشد.



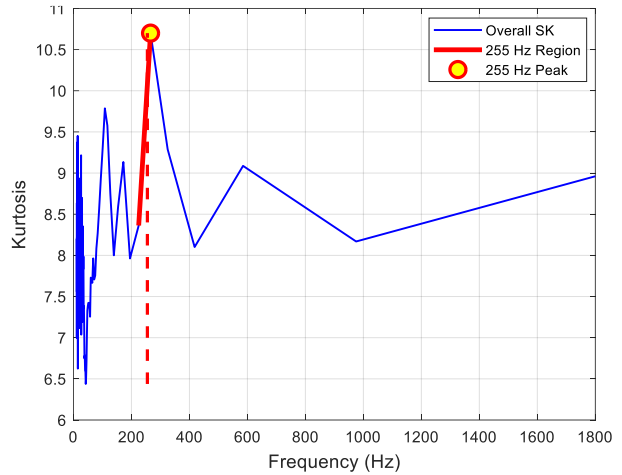
شکل ۸: نمودار کورتوگرام ناشی از تابع پاسخ فرکانسی سیستم

۲-۷- تخمین کشیدگی طیفی با روش تبدیل فوریه کوتاه-زمان

نمودار واقع در شکل ۹، نشان‌دهنده توزیع کشیدگی طیفی محاسبه شده با روش تبدیل فوریه زمان-کوتاه در محدوده فرکانسی کامل می‌باشد. مقادیر کشیدگی در اکثر فرکانس‌ها بین ۱/۵ تا ۴ متغیر است که نشان‌دهنده توزیع تقریباً نرمال انرژی طیفی است. نواحی قرمز رنگ در اطراف فرکانس ۲۵۵ هرتز (± 50 هرتز) نشان‌دهنده افزایش محسوس تیزی سیگنال در محدوده مود دوم می‌باشد. این افزایش کشیدگی مؤید وجود رفتار غیرگوسی و ناپایداری دینامیکی در این فرکانس است. نمودار شکل ۱۰، در مقیاس لگاریتمی نمایش داده شده که تمایز بهتری بین نواحی مختلف ایجاد می‌کند. پیک‌های کشیدگی در سایر فرکانس‌ها نیز مشاهده می‌شود اما شدت کمتری نسبت به مود دوم دارند. پارامترهای تبدیل فوریه زمان-کوتاه شامل طول پنجره ۵۱۲، همپوشانی ۲۵۶ و $NFFT=1024$ انتخاب شده که رزولوشن فرکانسی مناسبی را تضمین می‌کند. این روش قابلیت تشخیص ناهنجاری‌های محلی در دامنه فرکانس را به‌خوبی نشان می‌دهد. مقایسه دو بخش نمودار اهمیت استفاده از مقیاس‌های مختلف را برای تفسیر صحیح داده‌ها تأکید می‌کند.

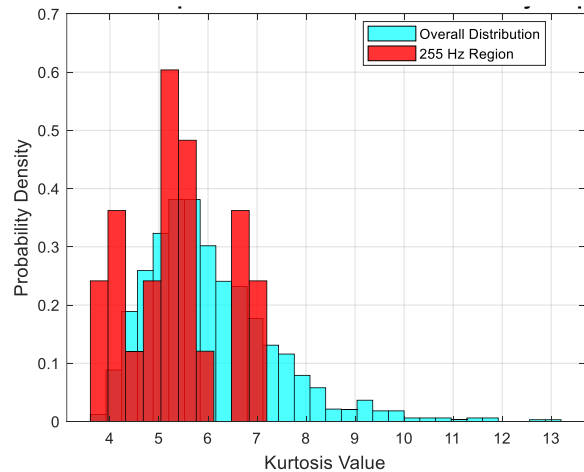
۸- نتیجه گیری

بررسی کشیدگی طیفی تابع پاسخ فرکانسی تیر آزاد-آزاد با استفاده از دو روش مختلف انجام شده است که هر کدام نگاه متفاوتی به رفتار دینامیکی سیستم ارائه می‌دهند. در این پژوهش ابتدا فرکانس طبیعی و شکل مدهای سیستم تحریک شده با ضربه به سه روش تحلیلی، عددی و تجربی به دست آمده است. نتایج فرکانس‌ها نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی سیستم در هر سه حالت با درصد خطای زیر ۱۰ درصد مقادیر قابل قبولی را در بازه بین ۰ تا ۱۸۰۰ هرتز ثبت کرده‌اند. مقایسه نتایج به دست آمده از تحلیل کشیدگی طیفی با دو روش تبدیل موجک و تبدیل فوریه زمان-کوتاه برای سیگنال ناشی از تابع پاسخ فرکانسی سیستم نشان می‌دهد که روش موجک تصویر کلان‌تر و هموارتری از رفتار سیستم ارائه می‌دهد و قله‌های اصلی مربوط به مدهای پایین‌تر را به خوبی شناسایی می‌کند، در حالی که روش تبدیل فوریه زمان-کوتاه جزئیات بیشتری از نوسانات فرکانسی نشان می‌دهد و قادر به شناسایی رزونانس‌های فرعی و هارمونیک‌ها نیز هست. تیزی سیگنال در مود دوم (تقریباً ۲۵۵ هرتز) نشان می‌دهد که این مود بیش‌تر از بقیه مدها مستعد ناپایداری دینامیکی و ناهنجاری سیستم است. توزیع کلی مقادیر کشیدگی ثبت شده سیستم دارای شکل تقریباً نرمال با میانگین حدود ۳ است که با خصوصیات آماری سیگنال‌های گاوسی مطابقت دارد. توزیع مود دوم انحراف محسوسی از توزیع کلی نشان می‌دهد و به سمت مقادیر بالاتر کشیدگی متمایل است. این انحراف نشان‌دهنده وجود رفتار غیر گاوسی و ناهنجاری دینامیکی در این فرکانس می‌باشد. دامنه تغییرات کشیدگی در مود دوم وسیع‌تر از توزیع کلی است که variability بیشتر این ناحیه را تأیید می‌کند. شفافیت ۰/۷ برای هیستوگرام قرمز امکان مقایسه بصری بهتر دو توزیع را فراهم می‌کند. 30 bin برای توزیع کلی و 10 bin برای مود دوم رزولوشن مناسبی را تضمین می‌کند. این بررسی آماری اهمیت مود دوم به عنوان ناحیه ناهنجاری را از نظر کمی تأیید می‌کند. مقایسه دو توزیع روشی قابل اعتماد برای تشخیص ناهنجاری‌های آماری محسوب می‌شود.



شکل ۱۱: نمودار کشیدگی طیفی سیگنال سیستم با استفاده از روش تبدیل موجک

هیستوگرام نرمال‌سازی شده در شکل ۱۲، نشان‌دهنده توزیع احتمالی مقادیر کشیدگی طیفی در کل محدوده فرکانسی (آبی فیروزه‌ای) و ناحیه مود دوم (قرمز) می‌باشد. توزیع کلی دارای شکل تقریباً نرمال با میانگین حدود ۳ است که با خصوصیات آماری سیگنال‌های گاوسی مطابقت دارد. توزیع مود دوم انحراف محسوسی از توزیع کلی نشان می‌دهد و به سمت مقادیر بالاتر کشیدگی متمایل است. این انحراف نشان‌دهنده وجود رفتار غیر گاوسی و ناهنجاری دینامیکی در این فرکانس می‌باشد. دامنه تغییرات کشیدگی در مود دوم وسیع‌تر از توزیع کلی است که variability بیشتر این ناحیه را تأیید می‌کند. شفافیت ۰/۷ برای هیستوگرام قرمز امکان مقایسه بصری بهتر دو توزیع را فراهم می‌کند. 30 bin برای توزیع کلی و 10 bin برای مود دوم رزولوشن مناسبی را تضمین می‌کند. این بررسی آماری اهمیت مود دوم به عنوان ناحیه ناهنجاری را از نظر کمی تأیید می‌کند. مقایسه دو توزیع روشی قابل اعتماد برای تشخیص ناهنجاری‌های آماری محسوب می‌شود.



شکل ۱۲: نمودار هیستوگرام مقادیر کشیدگی طیفی سیستم تحریک شده

[4] N. Fawazi, M. H. C. Man, and M. A. Amiruddin, "Damage detection in a free-free beam structure using reconstructed mode shape data: Experimental approach," *AIP Conference Proceedings*, Vol. 2798, No. 1, 2023, doi: [10.1063/5.0154234](https://doi.org/10.1063/5.0154234).

[5] C. C. Wu, "Study on rigid-body motions and elastic vibrations of a free-free double-tapered beam carrying any number of concentrated elements," *Journal of Vibration Engineering and Technology*, Vol. 10, pp. 541–558, 2022, doi: [10.1007/s42417-021-00391-x](https://doi.org/10.1007/s42417-021-00391-x).

[6] H. Qiao, Q. S. Li, and G. Q. Li, "Vibratory characteristics of flexural non-uniform Euler-Bernoulli beams carrying an arbitrary number of spring-mass systems," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, No. 4, pp. 725–743, 2002, doi: [10.1016/S0020-7403\(02\)00007-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(02)00007-3).

[7] S. Rizo-Patron and J. Sirohi, "Operational modal analysis of a helicopter rotor blade using digital image correlation," *Experimental Mechanics*, Vol. 56, No. 3, pp. 473–487, 2016, doi: [10.1007/s11340-016-0230-6](https://doi.org/10.1007/s11340-016-0230-6).

[8] F. L. M. dos Santos, B. Peeters, H. Van der Auweraer, L. C. S. Goes, and W. Desmet, "Vibration-based damage detection for a composite helicopter main rotor blade," *Case Studies in Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, doi: [10.1016/j.csmssp.2016.01.001](https://doi.org/10.1016/j.csmssp.2016.01.001).

[9] J. M. Montalvão e Silva and A. J. M. Araújo Gomes, "Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams," *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 20–25, 1990, doi: [10.1007/BF02322697](https://doi.org/10.1007/BF02322697).

[10] H. Cui, X. Xu, W. Peng, Z. Zhou, and M. Hong, "A damage detection method based on strain modes for structures under ambient excitation," *Measurement*, Vol. 125, pp. 438–446, 2018, doi: [10.1016/j.measurement.2018.05.004](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.05.004).

[11] M. A.-B. Abdo and M. Hori, "A numerical study of structural damage detection using changes in the rotation of mode shapes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 251, No. 2, pp. 227–239, 2002, doi: [10.1006/jsvi.2001.3989](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3989).

[12] F. Sayyad, B. Kumar, and S. Khan, "Approximate analytical method for damage detection in free-free beam by measurement of

جدول ۴: نتایج کلی به‌دست آمده از تحلیل کشیدگی طیفی سیگنال

توضیحات	واحد	مقدار	پارامتر/روش
محدوده آنالیز	هرتز	۰ - ۱۸۰۰	بازه فرکانسی
مود دوم	هرتز	۲۵۵	فرکانس ناهنجاری
کشیدگی کل طیف	-	۳/۰ - ۴/۵	Overall Spectral Kurtosis
کل طیف	-	۲/۸ - ۳/۲	میانگین کشیدگی کلی (تبدیل فوریه زمان-کوتاه)
حول ۲۰ الی ۲۵۵ هرتز	-	۴/۵ - ۶/۵	میانگین کشیدگی کلی (تبدیل فوریه زمان-کوتاه) در مود دوم
بیش‌ترین پیک در ۲۵۵ هرتز	-	۷/۰ - ۹/۰	حداکثر کشیدگی (تبدیل فوریه زمان-کوتاه) در مود دوم
حول ۲۰ الی ۲۵۵ هرتز	-	۳/۸ - ۵/۵	میانگین کشیدگی کلی (موجک) در مود دوم
بیش‌ترین پیک در ۲۵۵ هرتز	-	۶/۰ - ۸/۰	حداکثر کشیدگی (موجک) در مود دوم
Relative Anomaly	-	۰/۸ - ۱/۲	انحراف استاندارد کلی

۹- فهرست علائم

فرکانس طبیعی	ω
شکل مود	ϕ
ضریب میرایی	ζ
تابع پاسخ فرکانسی	$H(\omega)$
ضریب مقدار ویژه فرکانس	β_n
ممان اینرسی	I
چگالی	ρ
جرم	m
تبدیل فوریه نیروی محرک	$F(\omega)$
خواص مکانیکی	E
تابع تبدیل پیوسته	W_ψ
کشیدگی طیفی	SK

۱۰- منابع

- [1] A. M. Fadlalla, "Modal analysis of beams using finite element methods," *Journal of Civil and Construction Engineering Research*, Vol. 1, No. 1, 2024, doi: [10.1007/s40567-024-00119-9](https://doi.org/10.1007/s40567-024-00119-9).
- [2] M. Avcar, "Free vibration analysis of beams considering different geometric characteristics and boundary conditions," *International Journal of Mechanical Applications*, Vol. 4, No. 3, pp. 94–100, 2014, doi: [10.5923/j.mechanics.20140403.03](https://doi.org/10.5923/j.mechanics.20140403.03).
- [3] D. H. Nguyen, L. V. Ho, T. Bui-Tien, G. De Roeck, and M. A. Wahab, "Damage evaluation of free-free beam based on vibration testing," *Applied Mechanics*, Vol. 1, No. 2, pp. 142–152, 2020, doi: [10.3390/applmech1020010](https://doi.org/10.3390/applmech1020010).

- Processing*, Vol. 150, p. 107264, 2021, doi: [10.1016/j.ymsp.2020.107264](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2020.107264).
- [19] H. Salarieh and M. Ghorashi, "Free vibration of Timoshenko beam with finite mass rigid tip load and flexural-torsional coupling," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 48, No. 7, pp. 763–779, 2006, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2006.01.008](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.01.008).
- [20] S. Maiz, D. V. Bambill, C. A. Rossit, and P. A. A. Laura, "Transverse vibration of Bernoulli-Euler beams carrying point masses and considering rotatory inertia: Exact solution," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 303, nos. 3–5, pp. 895–908, 2007, doi: [10.1016/j.jsv.2006.12.028](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.12.028).
- [21] J.-L. Dion, I. Tawfiq, and G. Chevallier, "Harmonic component detection: Optimized spectral kurtosis for operational modal analysis," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, doi: [10.1016/j.ymsp.2011.07.009](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2011.07.009).
- [22] B. Eftekharijad, M. R. Carrasco, B. Charnley, and D. Mba, "The application of spectral kurtosis on acoustic emission and vibrations from a defective bearing," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 25, No. 1, pp. 266–284, 2011, doi: [10.1016/j.ymsp.2010.06.010](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2010.06.010).
- [23] G. M. Nita, "Spectral kurtosis statistics of transient signals," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 458, No. 3, pp. 2530–2540, 2016, doi: [10.1093/mnras/stw550](https://doi.org/10.1093/mnras/stw550).
- [24] M. Kiymik, I. Guler, A. Dizibuyuk, and M. Akin, "Comparison of STFT and wavelet transform methods in determining epileptic seizure activity in EEG signals for real-time application," *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 35, pp. 603–616, 2005, doi: [10.1016/j.compbiomed.2004.05.001](https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2004.05.001).
- axial vibrations," *International Journal of Damage Mechanics*, Vol. 22, No. 1, pp. 133–142, 2012, doi: [10.1177/1056789512440897](https://doi.org/10.1177/1056789512440897).
- [13] H. Dai, Z. Zheng, and H. Ma, "An explicit method for simulating non-Gaussian and non-stationary stochastic processes by Karhunen-Loève and polynomial chaos expansion," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 115, pp. 1–13, 2019, doi: [10.1016/j.ymsp.2018.05.026](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.05.026).
- [14] S. Tavares, "Aircraft structural design and life-cycle assessment through digital twins," *Designs*, Vol. 8, No. 2, p. 29, 2024, doi: [10.3390/designs8020029](https://doi.org/10.3390/designs8020029).
- [15] J. Li, X. Zhu, S. S. Law, and B. Samali, "Indirect bridge modal parameters identification with one stationary and one moving sensor using stochastic subspace identification," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 446, pp. 1–21, 2019, doi: [10.1016/j.jsv.2019.01.024](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.01.024).
- [16] S. Gao, F. Liu, and C. Jiang, "Improvement study of modal analysis for offshore structures based on reconstructed displacements," *Applied Ocean Research*, Vol. 110, p. 102596, 2021, doi: [10.1016/j.apor.2021.102596](https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102596).
- [17] J. Pacheco-Chérrez and O. Probst, "Vibration-based damage detection in a wind turbine blade through operational modal analysis under wind excitation," *Materials Today: Proceedings*, Vol. 56, No. 1, pp. 291–297, 2022, doi: [10.1016/j.matpr.2022.01.159](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.01.159).
- [18] X. Liu, C. Sun, J. R. Banerjee, H. C. Dan, and L. Chang, "An exact dynamic stiffness method for multibody systems consisting of beams and rigid bodies," *Mechanical Systems and Signal Processing*