



## Numerical study of subsurface crack growth in the spalling phenomenon of a spur gear tooth

Hasan Heirani<sup>\*1</sup> , Khalil Farhangdoost<sup>2</sup>

1. Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Bozorgmehr University of Qaenat, Qaen, Iran

2. Professor, Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

### Abstract

Gears are components that transmit rotational motion by engaging the gear teeth. Since gears are used in the power transmission system, their failure will lead to the mechanism failure. So, predicting failure factors is important to ensure a proper design. Tooth surface failure includes cases such as wear, pitting and spalling. Considering that experimental studies of fatigue phenomena are time-consuming and expensive, it is necessary to improve numerical models and bring them as close as possible to real conditions. The aim of this research is to present a numerical model to predict the subsurface fatigue crack initiation and growth under cyclic contact loading. In this study, Abaqus software was used for 2D modeling of a pair of teeth in contact. The analysis was performed using standard finite element method with progressive crack growth. The crack growth angle was determined according to the improved Richard criterion. The results showed that the maximum  $\Delta K_{II}$  position, with about 9% error, has the best agreement with the experimental spalling. So, the maximum  $\Delta K_{II}$  position was proposed as a criterion for determining the subsurface crack initiation position. The stress intensity factor of initial subsurface crack left and right tips is the same, and so, both tips start to grow simultaneously. In this model, the improved Richard criterion was used to determine the crack growth angle, which leads to the prediction of a spalling with dimensions close to the experimental spalling. The predicted spalling length showed a difference of about 6% compared to the experimental spalling.

### Keywords

Spalling  
Gear  
Contact fatigue  
Subsurface crack  
Crack initiation and growth

Received: 30.08.2025

Revised: 22.10.2025

Accepted: 22.11.2025

### \*Corresponding Author

Hasan Heirani

Email

[heirani@buqaen.ac.ir](mailto:heirani@buqaen.ac.ir)

## 1- Introduction

Gears are machine elements that transmit rotational motion and power from one shaft to another through meshing of the tooth flanks. In modern industry, the designer requires mechanical elements, including gears, that can withstand high loads at high operating speeds while having minimum size and weight. In such applications, predicting the main causes of failure is crucial to ensure an appropriate design. The primary failure mechanisms of gears are divided into two categories: tooth bending failure and failures caused by contact stresses [1]. Bending failure occurs when the bending stress in the tooth exceeds its bending fatigue strength. Surface failure

occurs when the contact stresses at the tooth surface exceed the surface fatigue strength of the teeth.

Glodez et. al. [2] proposed a new model for evaluating the pitting resistance of gear tooth flanks. In this model, the short-crack theory was employed to numerically simulate the fatigue process leading to pitting. On the basis of the computational results, they were able to estimate the service life of gear tooth flanks in terms of the number of stress cycles required for a crack to grow from its initial length to a critical length. Ding and Rieger [3] conducted an experimental study on gear tooth spalling in AISI

How to Cite this Article:

[1] H. Heirani and K. Farhangdoost, "Numerical study of subsurface crack growth in the spalling phenomenon of a spur gear tooth," *Journal of Science and Technology in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 257–269, 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.22034/stme.2025.544154.1164> (in Persian)



4340 steel gears and demonstrated the spalling process arising from the growth of cracks near the contact surface. Their experimental results confirmed the spalling mechanism of collapse of the ligament region, that is, the region between the crack tip and the contact surface. Ding and Gear [4] proposed a model for predicting the spalling depth of gears. They developed the computational model using numerical data obtained from finite element analysis. The spalling depth caused by contact loads and various crack sizes obtained from this model was compared with experimental results under corresponding loading conditions, demonstrating the accuracy of the proposed model. Heirani and Farhangdoost [5] proposed a two-dimensional model for predicting the initiation location and growth path of subsurface cracks on spur gear teeth. They identified the position of maximum  $\Delta K_{II}$  as the subsurface crack initiation location and employed the maximum tangential stress criterion to determine the crack growth path. The results of this model showed good agreement with experimental results. Batory et. al. [6] investigated the behavior of 3D-printed spur gears made from AISI 316L steel. The gears were tested under lubricated conditions and varying loadings to study the effect of torque on pitting resistance. The gears performed satisfactorily at torques below 60 N·m, whereas a torque of 135 N·m caused pitting on the teeth.

In previous studies on gear spalling formation, the equivalent two-cylinder contact model has been used. A limited number of studies have employed the involute tooth profile; however, instead of full contact between two teeth, a parabolic distribution of Hertzian contact pressure was shifted along the tooth surface. Given that the contact point between two teeth shifts during operation, the radius of curvature and load distribution vary, so modeling the contact between two teeth with an involute profile can bring the analysis closer to the physical reality of the problem.

## 2- Research Methods

In this section, the problem geometry is modeled as two real contacting gear teeth. To achieve this, the involute profile of the tooth must be modeled. An initial subsurface crack is considered in the model, and the initial crack is modeled at various depths. Contact loading is applied to the tooth, and the Mode I and Mode II stress intensity factors at the crack tips are extracted. The growth path of the subsurface crack under contact loading is determined using the modified Richard model according to Eq.1, which is based on experimental crack growth results under mixed-mode loading.

Loading is applied as torque on a gear. The crack propagates progressively, and the new crack geometry is modeled until the crack tip reaches the tooth surface, resulting in the formation of spalling on the gear tooth surface. Stress field analysis and determination of stress intensity factors are performed using the finite element software Abaqus.

Figure 1 shows a gear tooth with a module of 4.5 and 24 teeth, modeled in Abaqus software according to Reference [7]. Both gears are assumed to be made of steel (42CrMo4) with a Young's modulus of 206 GPa and a Poisson's ratio of 0.3. The coefficient of friction between the contact surfaces of two gear teeth was considered as 0.04, according to reference [7]. As shown in Figure 2, the element used for meshing is CPE4R. The mesh size in the crack tip region was set to 5  $\mu\text{m}$ , and the number of elements in cracked tooth was 19,150. A torque of 31 N·m is applied to the tooth.

## 3- Results

### 3.1 Fatigue crack initiation

Subsequently, an initial subsurface crack of length 25  $\mu\text{m}$ , according to reference [8], was positioned at various depths from the contact surface at the pitch circle location. Upon applying loading to the gear teeth, the stress intensity factor for the left and right crack tips was calculated. Figure 3 illustrates the depth of the experimental spalling bottom from reference [8] and the position of the maximum values of the three parameters  $\Delta K_{II}$ , Von Mises

stress, and Tresca stress. According to this figure, the position of the maximum  $\Delta K_{II}$  shows the best correlation with the experimental spalling depth. Therefore, for the subsurface crack growth phase, the initial crack will be placed at the depth corresponding to the maximum  $\Delta K_{II}$ .

### 3.2 Fatigue crack growth

The initial crack is placed at the location of maximum  $\Delta K_{II}$ , and stress intensity factors for both crack tips are calculated. By substituting these stress intensity factor values into the improved Richard relation, Eq. 1, presented by Heirani and Farhangdoost [5], the crack growth angle at this stage can be determined.

The crack is extended at the obtained angle with a longitudinal growth of  $10 \mu\text{m}$ . This process continues until the crack tips reach the tooth surface, resulting in the formation of a complete spalling. Figure 4 shows the complete path of subsurface crack growth until it reaches the surface and results in spalling formation on the gear tooth.

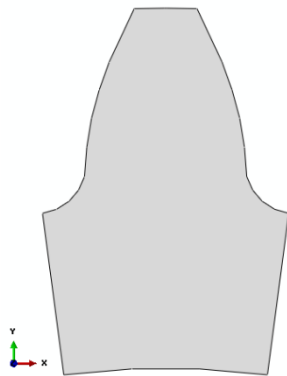


Figure 1: Tooth profile in Abaqus software

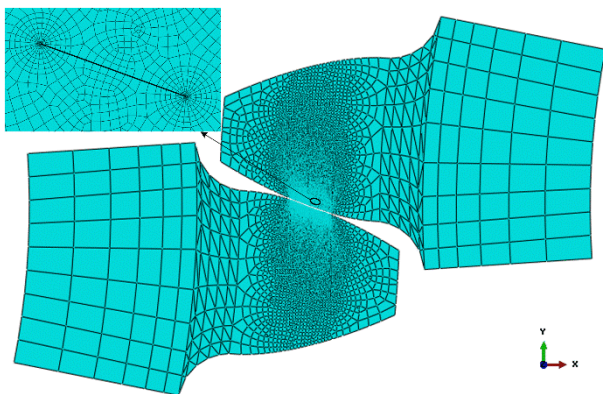


Figure 2: Tooth meshing and specialized mesh for the crack tip region

$$\theta = \beta \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right] + \gamma \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right]^2 \tag{1}$$

$$\beta = \begin{cases} 157.1, & K_I > 0 \\ 125.3, & K_I < 0 \end{cases}, \gamma = \begin{cases} -93.7, & K_I > 0 \\ -62.5, & K_I < 0 \end{cases}$$

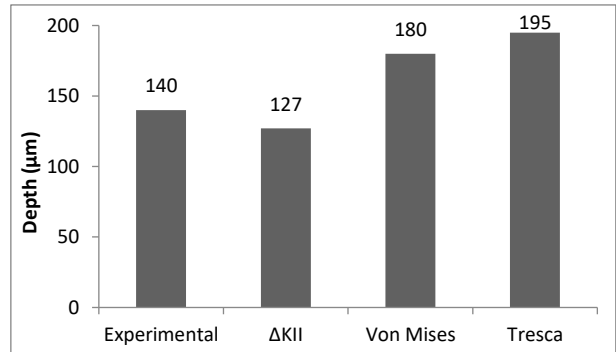


Figure 3: Experimental spalling depth and the positions of the maximum values of the  $\Delta K_{II}$ , Von Mises, and Tresca stress [9]

The crack is extended at the obtained angle with a longitudinal growth of  $10 \mu\text{m}$ . This process continues until the crack tips reach the tooth surface, resulting in the formation of a complete spalling. Figure 4 shows the complete path of subsurface crack growth until it reaches the surface and results in spalling formation on the gear tooth.

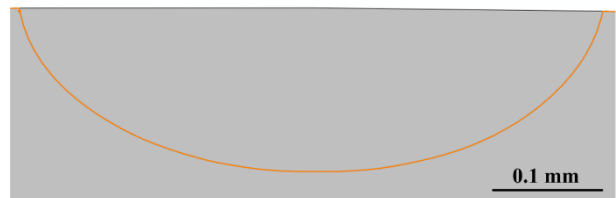


Figure 4: The subsurface crack growth path and spalling formation on the gear tooth

To verify the accuracy of the spalling shape predicted by the model presented in this dissertation, the model results are compared with the experimental spalling shape reported in [8]. Figure 5 shows the comparison between these two forms, which exhibit good dimensional agreement. The experimental spalling in this case has a depth of approximately  $140 \mu\text{m}$  and a length of about  $480 \mu\text{m}$ , while the simulated spalling has a depth of  $127 \mu\text{m}$  and a length of approximately  $450 \mu\text{m}$ . In contrast, the simulated spalling in [8], which used the maximum Von Mises stress criterion to determine the subsurface crack nucleation site and the virtual crack extension method for the crack growth phase, shows a depth of  $192 \mu\text{m}$  and a length

of around 600  $\mu\text{m}$ . The simulation by the model proposed in this dissertation provides a more accurate result compared to the simulation in [8].

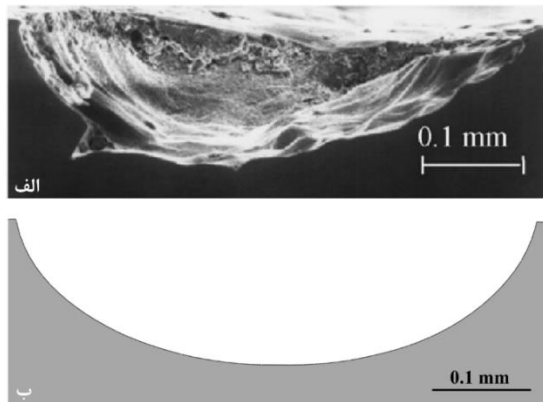


Figure 5: Spalling shape, (a) experimental [8], (b) simulation by the model presented in this research

#### 4- Conclusion

Numerical analyses were conducted to determine the nucleation location of subsurface cracks in a simple gear tooth and to identify the growth path of the subsurface crack until it reached the tooth surface, causing complete spalling. The most important findings of these analyses are as follows:

- Among the three parameters  $\Delta K_{II}$ , Von Mises stress, and Tresca stress, the location of maximum Von Mises stress has been the most commonly used indicator for the initial subsurface crack position. However, the results of this study indicated that the location of maximum  $\Delta K_{II}$  has best corresponds with the bottom of the experimental spalling, with a deviation of approximately 9%. Therefore, the location of maximum  $\Delta K_{II}$  is proposed as the criterion to determine the subsurface crack nucleation site.
- The stress intensity factor at the left and right tips of the initial subsurface crack is equal, resulting in simultaneous crack growth from both tips.
- The crack growth angle determined using the improved Richard criterion, as presented by Heirani and Farhangdoost, leads to the prediction of spalling dimensions closely matching the experimental spalling. The predicted spalling aperture length differs by

about 6% from the experimental spalling, whereas the reference model shows approximately 25% error.

Since the current model provides an accurate prediction of spalling dimensions on the gear tooth, it can aid in better understanding the subsequent effects such as meshing stiffness and gear vibration in the industry. Future research on the three-dimensional analysis of the spalling phenomenon could offer deeper insights into this issue.

#### 5- References

- [1] R. G. Budynas and J. K. Nisbett, *Shigley's Mechanical Engineering Design*, 9th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2011.
- [2] S. Glodež, H. Winter, and H. P. Stüwe, "A fracture mechanics model for the wear of gear flanks by pitting," *Wear*, vol. 208, pp. 177–183, 1997.
- [3] Y. Ding and N. F. Rieger, "Spalling formation mechanism for gears," *Wear*, vol. 254, pp. 1307–1317, 2003.
- [4] Y. Ding and J. A. Gear, "Spalling depth prediction model," *Wear*, vol. 267, pp. 1181–1190, 2009.
- [5] K. Farhangdoost, H. Heirani, "Predicting depth and path of subsurface crack propagation at gear tooth flank under cyclic contact loading," *Journal of Solid Mechanics*, vol. 9, no. 3, pp. 587–598, 2017.
- [6] G. Batory *et al.*, "Failure analysis of 3D-printed FZG spur gears made of AISI 316L austenitic steel," *Wear*, vols. 580–581, Art. no. 206313, 2025. doi: [10.1016/j.wear.2025.206313](https://doi.org/10.1016/j.wear.2025.206313)
- [7] B. Zafosnik, S. Glodež, M. Ulbin, and J. Flašker, "A fracture mechanics model for the analysis of micropitting in lubricated rolling–sliding contacts," *International Journal of Fatigue*, vol. 29, pp. 1950–1958, 2007. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2006.12.015](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2006.12.015)
- [8] G. Fajdiga, S. Glodež, and J. Kramar, "Pitting formation due to surface- and subsurface-initiated fatigue crack growth in contacting mechanical elements," *Wear*, vol. 262, pp. 1217–1224, 2007.
- [9] K. Farhangdoost, H. Heirani, "Effect of friction coefficient and maximum contact pressure on the spalling depth of gear teeth flank," in *Fracture, Fatigue and Wear*, Belgium, 2018, pp. 63–68.



## مطالعه عددی رشد ترک زیرسطحی در پدیده اسپالینگ دندانه چرخ دنده ساده

حسن حیرانی<sup>۱</sup> ID، خلیل فرهنگ دوست<sup>۲</sup> ID

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، بزرگمهر فائتات، قاین، ایران

۲- استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### چکیده

چرخ دنده‌ها قطعات مکانیکی پرکاربرد هستند که حرکت دورانی را با درگیری پهلوی دندانه‌ها منتقل می‌کنند. از آنجایی که چرخ دنده‌ها در سیستم انتقال قدرت یک مجموعه به کار گرفته می‌شوند، خرابی آن‌ها منجر به از کار افتادن مجموعه خواهد گردید. پس پیش‌بینی عوامل خرابی برای اطمینان از یک طراحی مناسب، اهمیت می‌یابد. خرابی سطح دندانه شامل مواردی از قبیل سایش، پیتینگ و اسپالینگ می‌باشد. با توجه به زمان بر و پرهزینه بودن مطالعات تجربی پدیده خستگی، باید به دنبال بهبود مدل‌های عددی بود و این مدل‌ها را به شرایط واقعی مسئله نزدیک کرد. هدف این پژوهش این است که یک مدل عددی برای پیش‌بینی پیدایش و رشد ترک خستگی زیرسطحی تحت بارگذاری تماسی چرخه‌ای ارائه کند. در این مطالعه از نرم‌افزار آباکوس برای مدل‌سازی دوبعدی یک جفت دندانه در تماس، استفاده شده است. تحلیل به روش اجزای محدود استاندارد با رشد نموی ترک انجام شد. زاویه رشد ترک طبق معیار بهبود یافته ریچارد تعیین گردید. نتایج این پژوهش نشان داد که موقعیت  $AK_{II}$  بیشینه، با حدود ۹٪ اختلاف، بهترین تطابق را با کف اسپالینگ تجربی دارد. در نتیجه موقعیت  $AK_{II}$  بیشینه به عنوان معیار موقعیت جوانه‌زنی ترک زیرسطحی پیشنهاد گردید. ضریب شدت تنش برای نوک چپ و راست ترک اولیه زیرسطحی یکسان بوده و هر دو نوک به صورت هم‌زمان شروع به رشد می‌کنند. در این مدل برای تعیین زاویه رشد ترک از معیار بهبود یافته ریچارد استفاده شد که منجر به پیش‌بینی اسپالینگ با ابعاد نزدیک به اسپالینگ تجربی می‌شود. طول دهانه اسپالینگ پیش‌بینی شده حدود ۶٪ اختلاف نسبت به اسپالینگ تجربی نشان داد.

### کلمات کلیدی

اسپالینگ

چرخ دنده

خستگی تماسی

ترک زیرسطحی

پیدایش و رشد ترک

دریافت مقاله: ۱۴۰۴/۰۶/۰۸

بازنگری مقاله: ۱۴۰۴/۰۷/۳۰

پذیرش مقاله: ۱۴۰۴/۰۹/۰۱

\*نویسنده مسئول

حسن حیرانی

ایمیل

[heirani@buqaen.ac.ir](mailto:heirani@buqaen.ac.ir)

### ۱- مقدمه

به دو دسته تقسیم می‌شوند، خرابی خمشی دندانه‌ها و خرابی‌های ناشی از تنش‌های تماسی [۱]. خرابی خمشی هنگامی رخ می‌دهد که تنش خمشی وارد به دندانه از استحکام دوام خمشی بیشتر شود. خرابی سطحی زمانی بروز می‌کند که تنش‌های تماسی در سطح دندانه از استحکام دوام سطح دندانه‌ها بیشتر شوند.

به‌طور کلی دو نوع خرابی خستگی سطحی به نام‌های پیتینگ و اسپالینگ وجود دارد. پیتینگ به‌صورت حفره‌های کم‌عمق (حدود 10  $\mu\text{m}$ ) ناشی از ترک سطحی است که بر روی سطح تماس ایجاد می‌شود. اسپالینگ به‌صورت حفره‌های عمیق‌تر (حدود 100-20  $\mu\text{m}$ ) ناشی از

چرخ دنده‌ها اجزائی از ماشین هستند که حرکت دورانی و توان را با درگیری پهلوی دندانه‌ها، از یک محور به محور دیگر منتقل می‌کنند. استفاده از چرخ دنده یکی از روش‌های انتقال حرکت دورانی است. چرخ دنده‌ها از گذشته مورد استفاده قرار گرفته‌اند و در حال حاضر نیز اجزای مهمی در بیشتر ماشین‌آلات هستند. در صنعت جدید، طراح به اجزای مکانیکی، از جمله چرخ دنده، نیاز دارد تا بتواند نیروهای بزرگ را در سرعت‌های کاری بالا تحمل کرده و اندازه و وزن آن کمینه باشد. در چنین کاربردهایی، پیش‌بینی عوامل اصلی خرابی برای اطمینان از یک طراحی مناسب، بسیار مهم است. عوامل اصلی خرابی چرخ دنده‌ها

#### How to Cite this Article:

[1] H. Heirani and K. Farhangdoost, "Numerical study of subsurface crack growth in the spalling phenomenon of a spur gear tooth," *Journal of Science and Technology in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 257-269, 2026. [Online]. Available: <https://doi.org/10.22034/stme.2025.544154.1164> (in Persian)



انحنای سطوح تماس و بارگذاری تعیین شده است. فادینگا و همکاران [۹-۱۱] یک مدل محاسباتی دو بعدی برای شبیه‌سازی پیتینگ سطح قطعات مکانیکی در معرض بارگذاری تماسی ارائه کردند. آن‌ها فرض کردند ترک اولیه‌ای به طول  $15\text{ mm}$  / ۰، در مدلسان به دلیل عملیات مکانیکی و حرارتی قبلی در سطح تماس ایجاد شده باشد. مدل با ترک اولیه، در معرض فشار تماسی قائم و بارگذاری مماسی ناشی از اصطکاک بین سطوح، فرض شده است. مدل آن‌ها تأثیر روغن محبوس در ترک را نیز بر روی رشد ترک در نظر گرفته است. هنگامی که بارگذاری دهانه ترک می‌رسد، سیال محبوس در ترک تحت فشار قرار گرفته و این فشار باعث اعمال مد بازشوندگی بر دهانه ترک می‌شود. آن‌ها برای شبیه‌سازی دو بعدی رشد ترک خستگی تحت بارگذاری تماسی از طول اولیه تا تشکیل یک پیتینگ در سطح، از روش بسط ترک مجازی بر پایه معیار چگالی انرژی کرنشی کمینه، استفاده کرده‌اند. دینگ و ریگر [۱۲] در سال ۲۰۰۳ دو پدیده پیتینگ و اسپالینگ را از هم مجزا کرده و برای هر یک تعریف واضحی ارائه دادند. آن‌ها یک مطالعه تجربی درباره اسپالینگ دندان‌های چرخ‌دنده بر روی چرخ‌دنده‌های فولادی AISI 4340 انجام داده و فرایند اسپالینگ ناشی از رشد ترک‌های نزدیک سطح تماس را نشان دادند. نتایج آزمایش‌های آن‌ها مکانیزم اسپالینگ فروپاشی ناحیه رباط، یعنی ناحیه بین نوک ترک تا سطح تماس، (پیشنهاد شده توسط دینگ [۱۳]) را اثبات کرد. آلفردسون و همکاران [۱۴] تأثیر بارگذاری تماسی یک بی‌نظمی<sup>۲</sup> سطحی، یعنی زبری را به‌عنوان مکانیزم اصلی در خستگی تماسی غلته‌ش شروع شده از سطح، به‌صورت عددی بررسی کردند. آن‌ها زاویه شروع اسپالینگ از سطح را مستندسازی کرده‌اند. در این پژوهش مدل تماس به‌صورت دو استوانه در نظر گرفته و زبری بر روی یکی از استوانه‌ها قرار داده شده است. آن‌ها دریافتند که زبری به‌عنوان یک افزایش دهنده تنش در سطح تماس عمل خواهد کرد. چرخه تنش محاسبه شده با چرخه‌های تنش داده شده از ترک‌های مخروطی شکل در نقطه بارگذاری، مقایسه شده است. آن‌ها تغییر شکل ناشی از بارگذاری تماسی را برای زبری، در طول حرکت غلته‌ش تخمین زده‌اند. دینگ و گیر [۱۵] مدلی برای پیش‌بینی عمق اسپالینگ چرخ‌دنده ارائه کردند. مدل بر پایه مکانیزم اسپالینگ فروپاشی رباط بوده و از طریق بررسی‌های آزمایشگاهی تأیید اعتبار شده است. آن‌ها مدل محاسباتی را با استفاده از داده‌های عددی به‌دست‌آمده از تحلیل اجزای محدود پایه‌گذاری کردند. عمق اسپالینگ ناشی از بارهای تماسی و اندازه‌های ترک مختلف به‌دست‌آمده از این

ترک‌های زیرسطحی است که بر روی سطح تماس شکل می‌گیرد. شکل‌گیری اسپالینگ، پیتینگ و سایر خرابی‌ها بر روی سطح دندان‌های چرخ‌دنده باعث تغییراتی در عملکرد چرخ‌دنده می‌شود. از جمله این تغییرات می‌توان به ارتعاش، سفتی درگیری<sup>۱</sup> و نیروی انتقالی اشاره کرد. ما و همکاران [۲-۴] در پژوهش‌هایی به بررسی اثر اسپالینگ و ابعاد مختلف آن بر سفتی درگیری چرخ‌دنده پرداختیم. آن‌ها اسپالینگ را به‌صورت یک حفره با سطح مقطع مستطیلی، بر روی سطح دندان‌های مدل کردند. نتایج نشان داد سفتی درگیری نسبت معکوس با ابعاد اسپالینگ دارد و حضور اسپالینگ باعث کاهش سفتی درگیری می‌گردد. همچنین تأثیر وجود اسپالینگ بر ارتعاش چرخ‌دنده‌های درگیر به‌صورت تحلیلی مطالعه شده است. وجود یک اسپالینگ با ابعاد  $2 \times 20\text{ mm}$  باعث افزایش بیش از دو برابری پارامتر ارتعاشی چرخ‌دنده شده است.

محسن زاده و همکاران [۵] اثر به‌کارگیری نانو ذرات دوده و کلسیم کربنات را بر رفتار سایشی چرخ‌دنده‌ای نانو کامپوزیتی بر پایه پلی‌استال بررسی کردند. نتایج آن‌ها نشان داد افزودن این مواد باعث کاهش مقدار سایش تا ۵۸٪ نسبت به پلی‌استال خالص می‌شود.

گلودز و همکاران [۶] یک مدل جدید برای تعیین مقاومت به پیتینگ پهلوی دندان‌های چرخ‌دنده ارائه کرده‌اند. در این مدل برای شبیه‌سازی محاسباتی فرایند خستگی منجر به پیتینگ، تئوری ترک‌های کوتاه به کار گرفته شده است. میدان تنش در ناحیه تماس چرخ‌دنده‌های درگیر و رابطه تابعی بین ضریب شدت تنش و طول ترک، با استفاده از روش اجزای محدود و مدل معادل دو استوانه، تعیین شده است. آن‌ها توانستند بر پایه نتایج محاسباتی، عمر کارکرد پهلوی دندان‌های چرخ‌دنده را با استفاده از تعداد چرخه‌های تنش لازم برای رشد ترک از طول ترک اولیه تا طول بحرانی، تعیین کنند. آن‌ها در مطالعات دیگری [۷ و ۸] یک مدل محاسباتی دو بعدی برای شبیه‌سازی پیتینگ سطح قطعات مکانیکی در معرض تماس لغزشی و غلته‌ش ارائه کردند. آن‌ها شرایط تماس هرگز بعلاوه نیروهای اصطکاک را در نظر گرفته و موقعیت و مقدار تنش بیشینه معادل را با استفاده از روش اجزای محدود تعیین نمودند. روش بسط مجازی ترک و تئوری رشد ترک کوتاه در چارچوب تحلیل اجزای محدود برای شبیه‌سازی دوبعدی رشد ترک خستگی تحت بارگذاری تماسی از ترک اولیه تا شکل‌گیری پیتینگ، مورد استفاده قرار گرفت. شکل پیتینگ‌ها و ارتباطشان با ضریب شدت تنش و طول ترک برای ترکیب‌های متنوع

<sup>2</sup> Irregularity<sup>1</sup> Mesh Stiffness

مدل با نتایج آزمایشگاهی به دست آمده از شرایط بارگذاری متناظر، مقایسه و صحت مدل پیشنهادی نشان داده شد. ژانگ و همکاران [۱۶] برای مطالعه و تحلیل خستگی تماسی چرخ‌دنده از تحلیل تماس دندان چرخ‌دنده و یک دستگاه آزمایش چرخ‌دنده FZG استفاده کردند. آزمایش‌ها در دستگاه آزمایش FZG با نمونه‌های چرخ‌دنده ساده ساخته شده از فولاد 20MnCr5 انجام شد. شکل‌گیری پیتینگ بعد از آزمایش با استفاده از SEM بررسی شد. آن‌ها دو نوع اسپالینگ خستگی ناشی از خرابی خستگی سطحی و زیرسطحی را بررسی و تحلیل طیفی انرژی را نیز برای هر دو موقعیت خستگی تحلیل کردند. نتایج پژوهش نشان داد که پیتینگ ایجاد شده ناشی از ناخالصی‌های اکسیدی در ماده است. آن‌ها در پژوهش دیگری [۱۷] مجموعه‌ای از آزمایش‌ها را بر روی نمونه‌های چرخ‌دنده ساده ساخته شده از فولاد 20MnCr5 انجام دادند. نتایج آن‌ها پدیده پیتینگ را در نزدیکی خط گام پینیون، جایی که به دلیل تماس یک جفت دندانه بیشترین بار به دندانه وارد می‌شود، نشان داد. آن‌ها منحنی‌های احتمال-تنش-عمر را برای استحکام خستگی تماسی به دست آوردند. داتسیشین و همکاران [۱۸] یک مدل تئوری دوبعدی برای بررسی فرایندهای شکست و ارزیابی دوام تماسی باقیمانده<sup>۱</sup> در قطعات تحت تماس چرخه‌ای، پیشنهاد دادند. مدل پیشنهادی بر پایه محاسبه گام به گام مسیرهای رشد ترک خستگی در ناحیه تماس می‌باشد. آن‌ها با استفاده از این مدل، شکل‌گیری آسیب‌های خستگی تماسی از قبیل پیتینگ، اسپالینگ و ترک خوردگی در اجسام غلتشی را بررسی کردند. بین و همکاران [۱۹] برای محاسبه عمر رشد ترک زیرسطحی در دندانه چرخ‌دنده از کرنش پلاستیک تجمع یافته استفاده کردند. برای محاسبه عمر رشد ترک زیرسطحی، محاسبه تمام چرخه‌های المان‌ها بر پایه کرنش پلاستیک تجمع یافته متغیر با زمان پیشنهاد شد. در طول این فرایند شکل‌گیری اسپالینگ از ترک زیرسطحی هم می‌تواند آشکار شود. آن‌ها اثر ضریب اصطکاک و گشتاور خارجی را نیز بر عمر رشد ترک بررسی کردند. نتایج نشان داد که افزایش گشتاور از ۱۰۰ به N.m ۱۵۰ باعث کاهش قابل توجه عمر می‌گردد. همچنین تغییر ضریب اصطکاک در بازه ۰/۰۶-۰/۰۴ تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر عمر اسپالینگ نمی‌گذارد. حیرانی و فرهنگ دوست [۲۰] یک مدل دوبعدی برای پیش‌بینی موقعیت پیدایش و مسیر رشد ترک زیرسطحی روی دندانه چرخ‌دنده ساده پیشنهاد کردند. آن‌ها موقعیت بیشینه  $\Delta K_{II}$  را به عنوان موقعیت پیدایش ترک زیرسطحی معرفی و معیار تنش مماسی

بیشینه را برای تعیین مسیر رشد ترک استفاده کردند. نتایج این مدل همخوانی خوبی با نتایج تجربی نشان داد. راگو و پاتل [۲۱] تأثیر اسپالینگ را بر عمر خستگی چرخ‌دنده ساده بررسی کردند. آن‌ها اثر ترک‌های اولیه با طول‌های مختلف را مطالعه کردند. نتایج آن‌ها نشان داد عمر خستگی چرخ‌دنده دارای ترک با منشأ ناحیه اسپالینگ از عمر خستگی چرخ‌دنده سالم کمتر است. کاسارولی و همکاران [۲۲] آزمایش‌هایی را بر روی چرخ‌دنده ساده ساخته شده از چدن نرم آستمبر شده برای تشخیص پیدایش و رشد ترک خستگی تماسی و درک برهمکنش احتمالی آن با عیوب ریخته‌گری و کروی‌های گرافیتی انجام دادند. در پایان آزمایش‌ها، تحلیل‌های متالورژیکی متعددی بر روی مناطق سطحی و زیرسطحی انجام شد تا مکانیزم خرابی در پیتینگ چدن نرم آستمبر شده مشخص گردد. ونگ و همکاران [۲۳] یک مدل آسیب تماسی چرخ‌دنده توربین بادی را بر پایه نظریه نیروی پیکربندی ماده تدوین کردند. تحلیل شبیه‌سازی میدان تنش سطح تماس برای ناحیه بحرانی حمل‌کننده بار در تماس چرخ‌دنده انجام و فرآیند تکامل آسیب تماس چرخ‌دنده تحت بارگذاری شبیه‌سازی شده است. برای مشکل خرابی چرخ‌دنده ناشی از ناخالصی اکسید فلزی، مدل تکامل آسیب مبتنی بر پارامترهای Jk ایجاد گردید. تأثیر عمق، شکل و موقعیت ناخالصی بر رفتار تکامل آسیب تحلیل شد. نتایج تحقیق نشان داد که مدل آسیب بر پایه نظریه نیروی پیکربندی می‌تواند به طور مؤثر پدیده آسیب تماسی چرخ‌دنده را شبیه‌سازی نموده و پدیده پیتینگ و اسپالینگ سطح دنده را توضیح دهد. مورالز و همکاران [۲۴] روشی برای ارزیابی ریسک نسبی خرابی خستگی تماسی سطحی نسبت به خرابی خستگی تماسی زیرسطحی در شرایط تماس دندان چرخ‌دنده ارائه کردند. پارامتر ریسک خستگی سطحی بر روی نمودار شکست برحسب ضخامت ویژه فیلم روانکار و یک معیار خستگی سطحی جدید که اثرات زبری سطح، فشار هرتز و میزان لغزش بر روی سطح خستگی را در برمی‌گیرد، ترسیم شد. داده‌های تجربی برای اعتبارسنجی نمودار پیش‌بینی شده و شناسایی محدوده‌هایی از شرایط کاری که در آن‌ها میکروپیتینگ، ماکروپیتینگ سطحی یا اسپالینگ زیرسطحی محتمل‌ترین حالت شکست هستند، مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج تجربی نشان داد که داده‌ها با روندهای پیش‌بینی شده توسط مدل تطابق خوبی دارند. باتوری و همکاران [۲۵] رفتار چرخ‌دنده‌های ساده چاپ سه‌بعدی از جنس فولاد AISI316L را بررسی کردند. چرخ‌دنده‌ها در شرایط روانکاری شده و تحت بارگذاری-

<sup>1</sup> Residual Contact Durability

دو چرخ‌دنده از جنس فولاد (42CrMo4) با مدول یانگ 206 GPa و نسبت پواسون ۰/۳ در نظر گرفته شده است.

جدول ۱: مشخصات هندسی چرخ‌دنده‌ها

مدول	تعداد	زاویه	فاصله	ضخامت
دندان	دندان	فشار	مراکز	دندان
۴/۵	۲۴	۲۰°	۱۰۸mm	۷/۱mm

یک ترک اولیه در محل زیر نقطه گام و در عمق‌های مختلف به شکل خط افقی و موازی با سطح دندان قرار می‌گیرد. محل زیر نقطه گام به دلیل بیشینه بودن فشار وارد بر سطح دندان، انتخاب می‌شود. تماس بین دو دندان به صورت surface-to-surface تعریف می‌شود. همچنین در دندان دارای ترک برای جلوگیری از فرورفتن لبه‌های ترک در یکدیگر general contact نیز تعریف شده است. ضریب اصطکاک بین سطح تماس دو دندان برابر با ۰/۰۴، مطابق با مراجع [۶ و ۲۶] و [۲۷] در نظر گرفته شده است. مراکز دایره چرخ‌دنده به‌عنوان نقاط مرجع تعریف‌شده و شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری، مطابق شکل ۳، بر روی این نقاط اعمال می‌شود. پس از تعریف تماس باید دندان‌ها مش-بندی شوند. برای مش زدن بهتر دندان‌ها از پارتیشن‌بندی استفاده می‌شود تا ناحیه نزدیک به محل تماس و ترک دارای اجزای ریزتری باشد. برای نوک ترک نیز از مش‌بندی خاص برای کانتور انتگرال استفاده می‌شود که در شکل ۴ نشان داده شده است. المان مورد استفاده برای مش‌زنی از نوع CPE4R می‌باشد. اندازه مش در ناحیه نوک ترک مطابق تحلیل بخش ۳-۱ برابر با ۵ μm لحاظ و تعداد المان در یک دندان ۱۹۱۵۰ عدد شد. بارگذاری مسئله در دو مرحله تعریف شده است: مرحله اول اعمال گشتاور به دندان‌ها و مرحله دوم حرکت دورانی دندان‌ها. در مرحله اول یک دندان ثابت بوده و گشتاور پیچشی ۳۱ N.m به دندان دیگر وارد می‌شود. در مرحله دوم چرخ‌دنده‌ای که در مرحله اول ثابت بود به صورت شبه‌استاتیک شروع به دوران کرده تا از روی ترک عبور کند. به این ترتیب بار تماسی بر روی سطح دندان حرکت کرده و از بالای ترک اولیه می‌گذرد. در نهایت ضرایب شدت تنش توسط نرم‌افزار و بر اساس معیار تنش محیطی بیشینه (Maximum Tangential Stress) محاسبه می‌شود.

های مختلف آزمایش‌شده و تأثیر گشتاور بر مقاومت به پیتینگ مورد مطالعه قرار گرفت. چرخ‌دنده‌ها در گشتاور کمتر از 60 N.m عملکرد امیدوارکننده‌ای داشتند، اما گشتاور 135 N.m پیتینگ روی دندان را ایجاد کرد.

در تحقیقات قبلی پیرامون شکل‌گیری اسپالینگ چرخ‌دنده از مدل معادل دو استوانه در تماس استفاده شده است. در تعداد معدودی از مطالعات از پروفیل اینولوت دندان استفاده شده است، اما در این پژوهش‌ها به جای تماس کامل دو دندان، توزیع سهمی شکل فشار تماسی هر ترز بر روی دندان جابجا شده است. با توجه به جابجا شدن نقطه تماس بین دو دندان در حین کار، شعاع انحنا و توزیع بار متغیر خواهد بود و مدل‌سازی تماس دو دندان با پروفیل اینولوت می‌تواند تحلیل را به واقعیت فیزیکی مسئله نزدیک‌تر کند.

## ۲- مواد و روش‌ها

در این بخش هندسه مسئله به صورت دو دندان واقعی در تماس، مدل‌سازی می‌شود. برای این کار باید پروفیل اینولوت دندان مدل شود. یک ترک اولیه زیرسطحی در مدل در نظر گرفته شده و ترک اولیه در عمق‌های مختلف مدل‌سازی می‌شود. بارگذاری تماسی بر روی دندان اعمال شده و ضرایب شدت تنش مد اول و دوم برای نوک‌های ترک استخراج می‌گردد. مسیر رشد ترک زیرسطحی تحت بارگذاری تماسی، با استفاده از مدل بهبودیافته ریچارد مطابق معادله ۱ که بر اساس نتایج تجربی رشد ترک مد ترکیبی پیشنهاد شده است، تعیین می‌گردد. بارگذاری به صورت گشتاور بر روی یک چرخ‌دنده وارد می‌شود. ترک به صورت نموی بسط می‌یابد و هندسه جدید ترک مدل می‌گردد تا هنگامی که نوک ترک به سطح دندان برسد و یک اسپالینگ بر روی سطح دندان چرخ‌دنده ایجاد کند. تحلیل میدان تنش و تعیین ضرایب شدت تنش در نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس انجام می‌شود.

### ۲-۱- مدل اجزای محدود

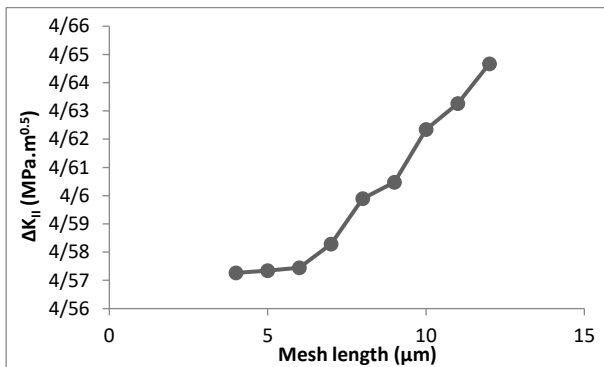
ابتدا یک کد در محیط برنامه‌نویسی متلب فراهم شده است تا برحسب پارامترهای مختلف چرخ‌دنده، پروفیل دندان را رسم و مختصات نقاط روی پروفیل دندان را ارائه کند. سپس مختصات نقاط وارد نرم‌افزار آباکوس شده و هندسه دندان در محیط نرم‌افزار ایجاد می‌شود شکل ۱ و شکل ۲ به ترتیب دندان چرخ‌دنده‌ای با مشخصات مدول ۴/۵ و ۲۴ دندان را مطابق مرجع [۲۶] در کد متلب و نرم‌افزار آباکوس نشان می‌دهند. جدول ۱ مشخصات هندسی چرخ‌دنده‌ها را ارائه می‌دهد. هر

### ۳- نتایج و بحث

#### ۳-۱- جوانه‌زنی ترک خستگی

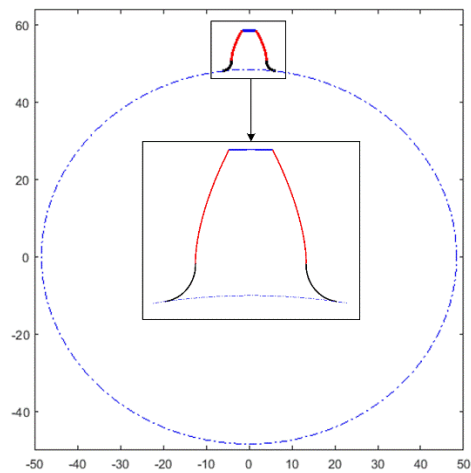
برای بررسی عددی محل جوانه‌زنی ترک خستگی زیرسطحی تحت بارگذاری خستگی تماسی در دندانه چرخ‌دنده ساده، دندانه‌های چرخ‌دنده با مشخصات مرجع [۲۷] (مدول ۴/۵، تعداد دندانه ۲۴، جنس 42CrMo4) شبیه‌سازی و بارگذاری شده و تحلیل تنش آن انجام می‌شود. مش‌بندی دندانه‌ها مطابق بخش ۲-۱ انجام می‌گردد. برای تعیین اندازه مش مناسب برای تحلیل تماس، نمودار  $\Delta K_{II}$  برحسب اندازه مش ناحیه تماس در شکل ۵ نشان داده شده است.

با دقت در شکل ۵ دیده می‌شود که اندازه  $\Delta K_{II}$  برای مش با اندازه  $6 \mu m$  تقریباً ثابت می‌شود. برای ادامه مراحل شبیه‌سازی اندازه مش  $5 \mu m$  انتخاب شده است.

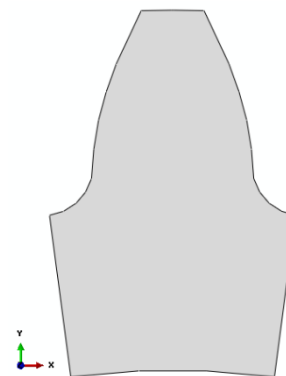


شکل ۵: تغییرات  $\Delta K_{II}$  برحسب اندازه مش

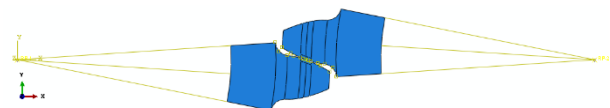
در ادامه ترک اولیه زیرسطحی به طول  $25 \mu m$ ، مطابق مرجع [۲۷]، در عمق‌های مختلف از سطح تماس در محل دایره گام قرار داده شده است. با انجام بارگذاری بر روی دندانه‌ها، ضریب شدت تنش برای نوک سمت چپ و راست ترک محاسبه می‌شود. شکل ۶ تغییرات ضریب شدت تنش مد دوم را برای دو نوک ترک برحسب عمق ترک اولیه از سطح تماس نشان می‌دهد. با توجه به شکل مقدار  $\Delta K_{II}$  در عمق  $127 \mu m$  بیشینه می‌شود. مرجع [۲۸] نیز محل جوانه‌زنی ترک زیرسطحی را برای این مشخصات بر اساس تنش برشی در عمق حدود  $120 \mu m$  پیش‌بینی کرده است. این مطابقت بین نتایج صحت مدل‌سازی کار حاضر را اثبات می‌کند.



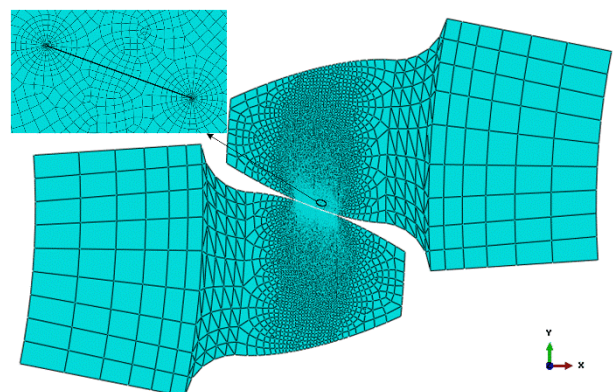
شکل ۱: پروفیل اینولوت دندانه چرخ‌دنده ساده در محیط متلب



شکل ۲: پروفیل دندانه در نرم‌افزار آباکوس



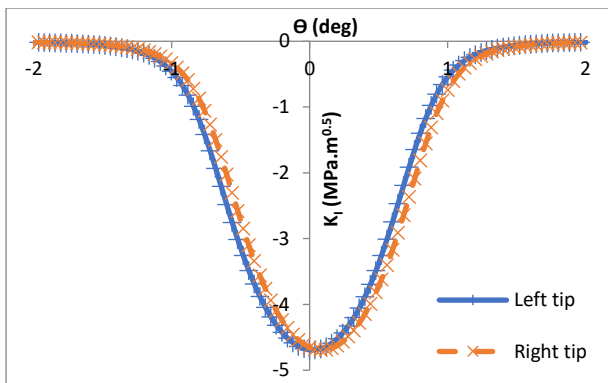
شکل ۳: تعریف تماس سطوح دندانه و نقاط مرجع



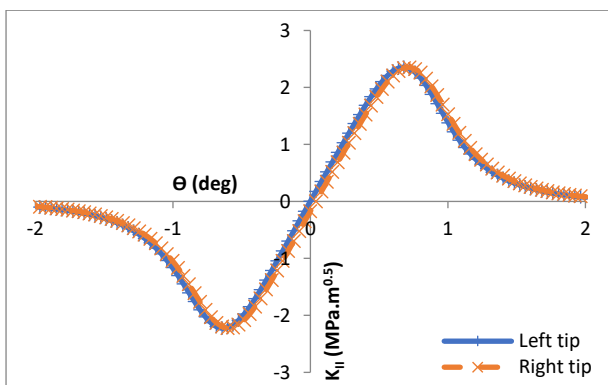
شکل ۴: مش‌بندی دندانه‌ها و مش مخصوص ناحیه نوک ترک

که در این رابطه  $\theta$  زاویه رشد ترک،  $K_I$  و  $K_{II}$  به ترتیب ضرایب شدت تنش مد اول و مد دوم،  $\beta$  و  $\gamma$  ضرایب ثابت وابسته به ضریب شدت تنش مد اول هستند.

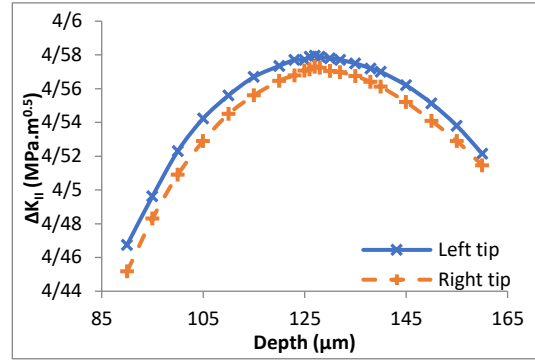
ترک با زاویه به دست آمده و با یک نمو طولی  $10 \mu\text{m}$  بسط داده می‌شود. هندسه ترک به صورت دستی اصلاح شده و دندانان مجدداً مش-زنی می‌گردد. پس از آن دوباره تماس دو دندانان برای هندسه جدید ترک برقرار شده و بارگذاری تماسی بر روی دندانان انجام می‌شود. پس از حل مسئله توسط نرم‌افزار ضرایب شدت تنش نوک‌های ترک بسط یافته، به دست می‌آید. مجدداً برای ضرایب شدت تنش این مرحله نیز زاویه رشد ترک محاسبه و ترک دوباره رشد داده می‌شود. این روند ادامه پیدا می‌کند تا زمانی که نوک‌های ترک به سطح دندانان برسند و یک اسپالینگ کامل شکل گیرد. چند مرحله از رشد ترک برای نمونه در شکل ۱۰ نشان داده شده است. شکل ۱۱ نیز مسیر کامل رشد ترک زیرسطحی تا روی سطح و ایجاد اسپالینگ بر روی دندانان را نشان می‌دهد.



شکل ۸: تغییرات  $K_I$  بر حسب دوران چرخ‌دنده

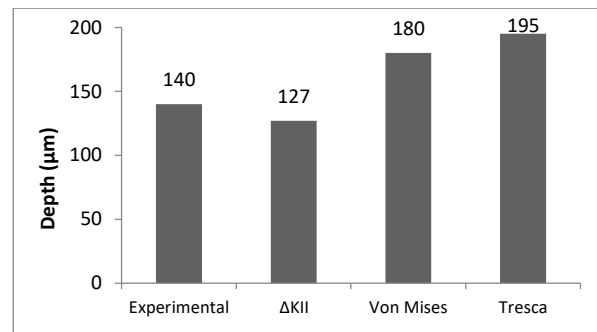


شکل ۹: تغییرات  $K_{II}$  بر حسب دوران چرخ‌دنده



شکل ۶: تغییرات ضریب شدت تنش مد دوم بر حسب عمق ترک اولیه

شکل ۷ عمق کف اسپالینگ تجربی مرجع [۲۷] و موقعیت مقدار بیشینه سه پارامتر  $\Delta K_{II}$ ، تنش ون میزز و ترسکا را نمایش می‌دهد. مطابق این شکل، موقعیت  $\Delta K_{II}$  بیشینه بهترین مطابقت را با عمق اسپالینگ تجربی نشان می‌دهد؛ بنابراین برای بخش رشد ترک زیرسطحی، ترک اولیه در همان عمق  $\Delta K_{II}$  بیشینه قرار داده خواهد شد.



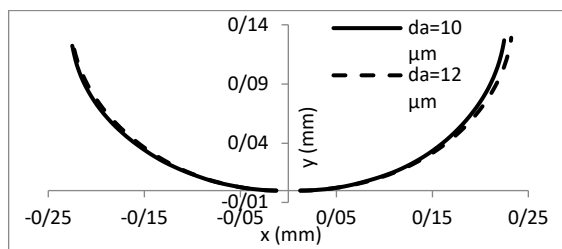
شکل ۷: عمق اسپالینگ تجربی و موقعیت بیشینه سه پارامتر  $\Delta K_{II}$  تنش ون میزز و ترسکا [۲۹]

### ۲-۳- رشد ترک خستگی

پس از تعیین عمق  $\Delta K_{II}$  بیشینه، ترک اولیه در آن موقعیت قرار داده شده و ضرایب شدت تنش برای هر دو نوک ترک محاسبه می‌شود. شکل ۸ و شکل ۹ به ترتیب تغییرات ضرایب شدت تنش مد اول و مد دوم را برای ترک اولیه بر حسب زاویه دوران چرخ‌دنده، نسبت به موقعیت تماس دندانان روی دایره گام، نشان می‌دهد. با جایگذاری این مقادیر ضرایب شدت تنش در رابطه بهبودیافته ریچارد، معادله ۱، ارائه شده توسط حیرانی و فرهنگ دوست [۳۰]، زاویه رشد ترک در این مرحله را می‌توان تعیین کرد.

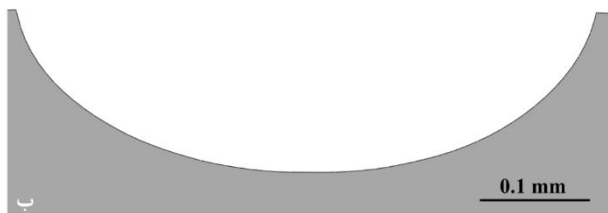
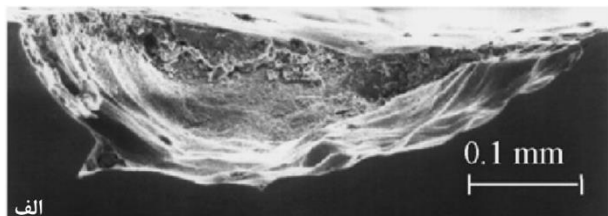
$$\theta = \beta \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right] + \gamma \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right]^2 \quad (1)$$

$$\beta = \begin{cases} 157.1, & K_I > 0 \\ 125.3, & K_I < 0 \end{cases}, \gamma = \begin{cases} -93.7, & K_I > 0 \\ -62.5, & K_I < 0 \end{cases}$$



شکل ۱۳: مقایسه شکل دو اسپالینگ پیش‌بینی شده با نمو ترک  $12 \mu\text{m}$  و  $10 \mu\text{m}$

برای بررسی صحت شکل اسپالینگ پیش‌بینی شده توسط مدل ارائه شده در این رساله، نتیجه مدل با شکل اسپالینگ تجربی ارائه شده در مرجع [۲۷] مقایسه می‌شود. شکل ۱۴ مقایسه این دو شکل را نشان می‌دهد که به لحاظ ابعادی مطابقت خوبی با هم دارند. تماس دو دندانه مطابق شکل ۴ برقرار بوده و ترک اولیه در زیر نقطه گام مدل سازی شده است. اسپالینگ تجربی این مسئله دارای عمق حدود  $140 \mu\text{m}$  و طول حدود  $480 \mu\text{m}$  بوده و اسپالینگ شبیه‌سازی شده نیز دارای عمق  $127 \mu\text{m}$  و طول حدود  $450 \mu\text{m}$  می‌باشد. این در حالی است که اسپالینگ شبیه‌سازی شده در مرجع [۲۷] که در آن از معیار تنش ون میزب بیشینه برای تعیین محل جوانه‌زنی ترک زیرسطحی و روش بسط مجازی ترک برای مرحله رشد ترک استفاده شده است، دارای عمق  $192 \mu\text{m}$  و طول حدود  $600 \mu\text{m}$  است. شبیه‌سازی توسط مدل پیشنهادی این رساله نتیجه دقیق‌تری نسبت به شبیه‌سازی مرجع [۲۷] دارد.



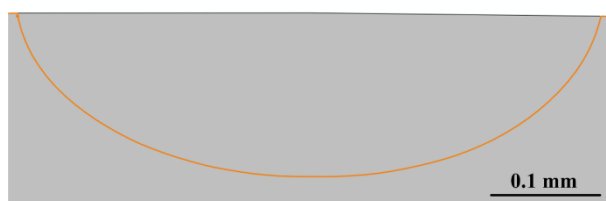
شکل ۱۴: شکل اسپالینگ، الف) تجربی [۲۷]، ب) شبیه‌سازی توسط مدل ارائه شده در این پژوهش

#### ۴- نتیجه‌گیری

بررسی‌های عددی برای تعیین محل جوانه‌زنی ترک زیرسطحی در دندانه چرخ‌دنده ساده و تعیین مسیر رشد ترک زیرسطحی تا رسیدن ترک به سطح دندانه و ایجاد یک اسپالینگ کامل انجام و با نتایج تجربی

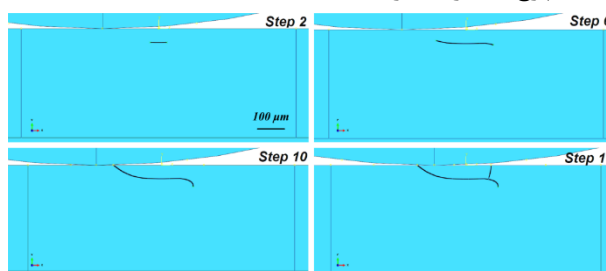


شکل ۱۰: چند مرحله از رشد ترک زیرسطحی



شکل ۱۱: مسیر رشد ترک زیرسطحی و ایجاد اسپالینگ بر روی دندانه

مسیر رشد ترک در مدل معادل دو استوانه با استفاده از معیار تنش مماسی بیشینه و مدل پروفیل اینولوت با استفاده از معیار بهبود یافته ریچارد، به ترتیب در شکل ۱۲ و شکل ۱۰ نشان داده شده است. مقایسه این دو شکل نشان می‌دهد نتایج مدل‌سازی پیشرفته، یعنی استفاده از پروفیل اینولوت و معیار بهبود یافته ریچارد، مشابهت بیشتری به نتایج تجربی نشان می‌دهد تا نتایج مدل‌سازی ساده. در مدل‌سازی پیشرفته هر دو نوک ترک به سمت سطح رشد یافته اما در مدل‌سازی ساده یک نوک ترک به سمت سطح و نوک دیگر به داخل جسم رشد می‌کند. رشد هر دو نوک ترک به سمت سطح به نتایج تجربی اسپالینگ دندانه چرخ‌دنده نزدیک‌تر است.



شکل ۱۲: چند مرحله رشد ترک زیرسطحی از ترک اولیه تا شکل‌گیری اسپالینگ برای نمونه a [۲۰]

در ادامه مسیر رشد ترک و شکل اسپالینگ پیش‌بینی شده با نمو رشد ترک  $12 \mu\text{m}$  و  $10 \mu\text{m}$  با هم مقایسه می‌شوند. شکل ۱۳ مقایسه دو شکل اسپالینگ پیش‌بینی شده را نشان می‌دهد. با توجه به شکل،  $20\%$  افزایش در نمو رشد ترک تنها باعث  $1/8\%$  افزایش اندازه دهانه اسپالینگ پیش‌بینی شده، می‌شود که خود نشان‌دهنده قابل قبول بودن اندازه نمو رشد ترک است.

- [4] R. Ma and Y.-S. Chen, "Bifurcation of multi-freedom gear system with spalling defect," *Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 34, pp. 475–488, 2013. doi: [10.1007/s10483-013-1684-7](https://doi.org/10.1007/s10483-013-1684-7)
- [5] K. S.-N. Rasool Mohsenzadeh, "Experimental studies on the durability of PA6–PP–CaCO<sub>3</sub> nanocomposite gears," *Journal of Science and Technology of Composites*, vol. 3, no. 2, pp. 147–156, 2016 (in Persian).
- [6] S. Glodež, H. Winter, and H. P. Stüwe, "A fracture mechanics model for the wear of gear flanks by pitting," *Wear*, vol. 208, pp. 177–183, 1997.
- [7] S. Glodež, Z. Ren, and J. Flašker, "Simulation of surface pitting due to contact loading," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 43, pp. 33–50, 1998.
- [8] S. Glodež, Z. Ren, and J. Flašker, "Surface fatigue of gear teeth flanks," *Computers & Structures*, vol. 73, pp. 475–483, 1999.
- [9] J. Flašker, G. Fajdiga, S. Glodež, and T. K. Hellen, "Numerical simulation of surface pitting due to contact loading," *International Journal of Fatigue*, vol. 23, pp. 599–605, 2001.
- [10] Z. Ren, S. Glodež, G. Fajdiga, and M. Ulbin, "Surface-initiated crack growth simulation in moving lubricated contact," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 38, pp. 141–149, 2002.
- [11] G. Fajdiga, J. Flašker, and S. Glodež, "Influence of different parameters on surface pitting of contacting mechanical elements," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 71, pp. 747–758, 2004.
- [12] Y. Ding and N. F. Rieger, "Spalling formation mechanism for gears," *Wear*, vol. 254, pp. 1307–1317, 2003.
- [13] Y. Ding, R. Jones, and B. T. Kuhnell, "Elastic–plastic finite element analysis of spall formation in gears," *Wear*, vol. 197, pp. 197–205, 1996.
- [14] B. Alfredsson, J. Dahlberg, and M. Olsson, "The role of a single surface asperity in rolling contact fatigue," *Wear*, vol. 264, pp. 757–762, 2008.

موجود در مقالات مقایسه شد. مهم‌ترین نتایج این بررسی‌ها به شرح زیر می‌باشد:

- در میان سه پارامتر  $\Delta K_{II}$ ، تنش ون میزز و تنش ترسکا، محل تنش بیشینه ون میزز متداول‌ترین کاربرد را به‌عنوان موقعیت ترک اولیه زیرسطحی داشته است؛ اما نتایج این پژوهش نشان داد که موقعیت  $\Delta K_{II}$  بیشینه، با اختلاف حدود ۹٪ بهترین تطابق را با کف اسپالینگ تجربی دارد. در نتیجه موقعیت  $\Delta K_{II}$  بیشینه به‌عنوان معیار تعیین موقعیت جوانه‌زنی ترک زیرسطحی پیشنهاد می‌گردد.
  - ضریب شدت تنش برای نوک چپ و راست ترک اولیه زیرسطحی یکسان است و در نتیجه هر دو نوک به‌صورت هم‌زمان شروع به رشد می‌کنند.
  - تعیین زاویه رشد ترک با استفاده از معیار بهبودیافته ریچارد، ارائه‌شده توسط حیرانی و فرهنگ دوست [۳۰]، منجر به پیش‌بینی یک اسپالینگ با ابعاد نزدیک به اسپالینگ تجربی می‌شود. طول دهانه اسپالینگ پیش‌بینی‌شده حدود ۶٪ اختلاف با اسپالینگ تجربی دارد در صورتی که مدل مرجع [۲۷] حدود ۲۵٪ خطا ایجاد کرده است.
- با توجه به اینکه مدل حاضر پیش‌بینی مناسبی از ابعاد اسپالینگ روی دندانه چرخ‌دنده ارائه می‌دهد؛ می‌تواند به شناخت بهتر آثار بعدی آن از جمله سفتی درگیری و ارتعاش چرخ‌دنده، در صنعت کمک کند. بررسی سه‌بعدی پدیده اسپالینگ در پژوهش‌های آتی می‌تواند فهم بهتری از این پدیده ارائه دهد.

## ۵- منابع

- [1] R. G. Budynas and J. K. Nisbett, *Shigley's Mechanical Engineering Design*, 9th ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 2011.
- [2] R. Ma and Y. Chen, "Research on the dynamic mechanism of the gear system with local crack and spalling failure," *Engineering Failure Analysis*, vol. 26, pp. 12–20, 2012. doi: [10.1016/j.engfailanal.2012.05.022](https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2012.05.022)
- [3] R. Ma, Y. Chen, and Q. Cao, "Research on dynamics and fault mechanism of spur gear pair with spalling defect," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, pp. 2097–2109, 2012. doi: [10.1016/j.jsv.2011.12.010](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.12.010)

- [23] R. Wang, R. Liu, S. Duan, J. Wang, and C. Yu, "Effect of inclusion on contact damage evolution of wind turbine gears based on configurational force theory," *Tribology International*, vol. 202, Art. no. 110391, 2025.
- [24] G. E. Morales-Espejel and A. Kadiric, "Application of a contact fatigue life model to assess the relative risk of surface versus subsurface initiated fatigue in gears," *Wear*, vols. 578–579, Art. no. 206216, 2025.
- [25] G. Batory *et al.*, "Failure analysis of 3D-printed FZG spur gears made of AISI 316L austenitic steel," *Wear*, vols. 580–581, Art. no. 206313, 2025. doi: [10.1016/j.wear.2025.206313](https://doi.org/10.1016/j.wear.2025.206313)
- [26] B. Zafosnik, S. Glodež, M. Ulbin, and J. Flašker, "A fracture mechanics model for the analysis of micropitting in lubricated rolling–sliding contacts," *International Journal of Fatigue*, vol. 29, pp. 1950–1958, 2007. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2006.12.015](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2006.12.015)
- [27] G. Fajdiga, S. Glodež, and J. Kramar, "Pitting formation due to surface- and subsurface-initiated fatigue crack growth in contacting mechanical elements," *Wear*, vol. 262, pp. 1217–1224, 2007.
- [28] G. Fajdiga and M. Šraml, "Fatigue crack initiation and propagation under cyclic contact loading," *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 76, pp. 1320–1335, 2009.
- [29] K. Farhangdoost, H. Heirani, "Effect of friction coefficient and maximum contact pressure on the spalling depth of gear teeth flank," in *Fracture, Fatigue and Wear*, Belgium, 2018, pp. 63–68.
- [30] K. F. Hasan Heirani, "Mixed-mode I/II fatigue crack growth under tensile or compressive far-field loading," *Materials Research Express*, vol. 4, Art. no. 116505, 2017. doi: [10.1088/2053-1591/aa9446](https://doi.org/10.1088/2053-1591/aa9446)
- [15] Y. Ding and J. A. Gear, "Spalling depth prediction model," *Wear*, vol. 267, pp. 1181–1190, 2009.
- [16] J. Zhang, Q. Zhang, C. Wu, Z. Xu, and S. Lyu, "Experimental application of pitting formation for 20MnCr5 carburized gear tooth," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 15, pp. 899–903, 2014. doi: [10.1007/s12541-014-0415-9](https://doi.org/10.1007/s12541-014-0415-9)
- [17] Q. Zhang, J. Zhang, C. Wu, Z. Xu, and S. Lyu, "Evaluation of contact fatigue strength for 20MnCr5 carburized gear," *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 15, pp. 117–121, 2014. doi: [10.1007/s12541-013-0313-6](https://doi.org/10.1007/s12541-013-0313-6)
- [18] O. P. Datsyshyn, V. V. Panasyuk, and A. Y. Glazov, "Residual lifetime estimation of tribojoint elements based on contact fatigue damage criteria," *International Journal of Fatigue*, vol. 83, pp. 300–312, 2016. doi: [10.1016/j.ijfatigue.2015.10.026](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.10.026)
- [19] Y. Yin, Y.-X. Chen, and L. Liu, "Lifetime prediction for subsurface crack propagation using a three-dimensional dynamic FEA model," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 87, pp. 54–70, 2017. doi: [10.1016/j.ymsp.2016.09.033](https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.09.033)
- [20] K. Farhangdoost, H. Heirani, "Predicting depth and path of subsurface crack propagation at gear tooth flank under cyclic contact loading," *Journal of Solid Mechanics*, vol. 9, no. 3, pp. 587–598, 2017.
- [21] S. P. Mahendra Singh Raghav, "Crack propagation and fatigue life estimation of spur gear with and without spalling failure," *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, vol. 127, Art. no. 104020, 2023. doi: [10.1016/j.tafmec.2023.104020](https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104020)
- [22] A. Casaroli, E. Conrado, C. Gorla, C. Crispino, R. Gerosa, and B. Rivolta, "Mechanical and metallurgical characterization of contact fatigue mechanisms in ADI spur gears," *Engineering Failure Analysis*, vol. 165, Art. no. 108775, 2024.